ಸರ್ ಕೆ. ಪಿ. ಪುಟ್ಟಣ್ಣಚೆಟ್ಟರ ಪುದುವಟ್ಟಿನ ಮಾಲೆ—೩೮

ಗಣಿತ ಎಂದರೇನು?

ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
೧೯೬೮

ಸರ್ ಕೆ. ಪಿ. ಪುಟ್ಟಣ್ಣಚೆಟ್ಟಿಯವರ ಪುದುವಟ್ಟಿನ ಮಾಲೆ-೩೮

ಗಣಿತ ಎಂದರೇನು?

ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮೂಲ :
ಡಾ|| ವಿ. ಎಸ್. ಹುಸೂರ್ ಬಸಾರ್
ಪೂನಾ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಭಾಷಾಂತರ :
ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ
ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ರೀಡರ್
ಶ್ರೀ ಜಯಚಾಮರಾಜೇಂದ್ರ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜು
ಮೈಸೂರು

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
೧೯೬೮

ಮೊದಲನೆಯ ಮುದ್ರಣ : ೧೯೬೮

ಪ್ರಕಾಶಕರು :

ಡೈರೆಕ್ಟರ್ 'ಪ್ರಸಾರಾಂಗ'

ಮಾನಸಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು-೬

ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ : ೪೦ ಪೈಸೆ

ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿ : ೫೦ ಪೈಸೆ

ಮುದ್ರಕರು :

ಶ್ರೀ ಶಕ್ತಿ ಎಲೆಕ್ಟ್ರಿಕ್ ಪ್ರೆಸ್

ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿಪುರಂ, ಮೈಸೂರು-೪

ಮುನ್ನುಡಿ

ದಿವಂಗತ ಸರ್ ಕೆ. ಪಿ. ಪುಟ್ಟಣ್ಣಚೆಟ್ಟರು ಉದಾರಬುದ್ಧಿಯಿಂದ ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿಧಿಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿಸಿ, ಆ ಹಣದಿಂದ ಈ ಪುದುವಟ್ಟಿನ ಪ್ರಕಟನಮಾಲೆ ಬೆಳೆಯಲು ಅವಕಾಶವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿ, ನಾಡಿಗೆ ಮಹದುಪಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಪುಣ್ಯಕಾರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಇತ್ತ ಹಣವನ್ನು ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಸಾರಾಂಗ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದೆ. ಸೇವಾಮನೋಭಾವನೆಯಿಂದ ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿರುವ ಈ ಮಾಲೆಯಿಂದ ನಮ್ಮ ಜನರಿಗೆ ಮಹದುಪಕಾರವಾಗುತ್ತಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಸರ್ವದಾ ಸರ್ ಕೆ. ಪಿ. ಪುಟ್ಟಣ್ಣಚೆಟ್ಟರನ್ನು ನೆನೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದಿರುವ ಪ್ರಪಂಚದ ಇತರ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳೊಡನೆ ನಾವು ಸಮಸ್ಪರ್ಧಿಗಳಾಗಿ ಬಾಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಜನರಲ್ಲಿರುವ ಮೂಢನಂಬಿಕೆಗಳು ಮಾಯವಾಗಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಬುದ್ಧಿ ಬೆಳೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಳ್ಳಿಗಳ ನಾಡು ನಮ್ಮ ದೇಶ. ನಮ್ಮ ಜನರಿಗೆ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಷಯಗಳ ಅರಿವು ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟು, ಅವರಲ್ಲಿರುವ ದುಷ್ಟ ಪದ್ಧತಿಗಳು ದೂರವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ತಿಳಿದವರ ಮುಖ್ಯ ಕರ್ತವ್ಯವಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಜನರಿಗೆ ಆರೋಗ್ಯ ನಿಯಮಗಳ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗಾದರೂ ಇರಬೇಕು. ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗಗಳಿಗೆ ಕಾರಣ ಮತ್ತು ನಿವಾರಣೋಪಾಯಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಜನರು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ವ್ಯವಸಾಯ, ಪಶುಪಾಲನೆ ಮತ್ತು ಕೈಗಾರಿಕೆ ಮುಂತಾದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಆಧುನಿಕ ತಿಳಿವಳಿಕೆ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕ. ಆಧುನಿಕ ಯಂತ್ರಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ತಂತ್ರ

ವನ್ನು ನಮ್ಮವರು ಅರಿಯಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ನಮ್ಮ ಜನರ ಆರ್ಥಿಕಮಟ್ಟ ಸುಧಾರಣೆಯಾಗಬೇಕು, ಆಚಾರ ವ್ಯವಹಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಪಾಟಾಗಬೇಕು; ನಾಗರಿಕ ಜೀವನದ ಕಡೆ ನಮ್ಮ ಜನರ ಗಮನ ಹರಿಯಬೇಕು.

ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಜನಸಾಮಾನ್ಯರಲ್ಲಿ ಹರಡುವ ಸಲುವಾಗಿ ಸರ್ ಕೆ. ಪಿ. ಪುಟ್ಟಣ್ಣಚೆಟ್ಟರ ಪುದುವಟ್ಟಿನ ಪ್ರಕಟನ ಮಾಲೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. ಈ ಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನೂ ಜನಸಾಮಾನ್ಯರ ನಿತ್ಯಜೀವನಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕ ವಾಗಿರುವ ವಿಷಯಗಳನ್ನೂ ಕುರಿತು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿಸಿ, ಪ್ರಕಟಿಸಿ, ಅತ್ಯಂತ ಕಡಮೆ ಬೆಲೆಗೆ ಮಾರಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಈ ಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಟಪಾಲ್ ಸಂಸ್ಥೆಯ ವಿವರ, ವಿಶ್ವ ವಿಸರಣ, ವ್ಯವಸಾಯದ ಮಣ್ಣುಗಳು, ಹೆರಿಗೆ ಮತ್ತು ಶಿಶು ಪೋಷಣೆ, ಪಶುಪಾಲನೆ, ಗ್ರಾಮನೈರ್ಮಲ್ಯ, ಪರಮಾಣುಶಕ್ತಿ, ಸಂಸಾರಯೋಜನೆ ಮುಂತಾದ ಗಹನ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಮೂವತ್ತಾರು ಕಿರುಹೊತ್ತಗೆಗಳು ಪ್ರಕಟವಾಗಿವೆ. ಈ ಕಿರು ಹೊತ್ತಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ವಿವರಣೆಗೆ ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಇವು ಮುಖ್ಯಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನೂ ಬಿಡದೆ, ವಿಷಯದ ಪೂರ್ಣ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತವೆ. ಜನಸಾಮಾನ್ಯರ ನಿತ್ಯ ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಆವಶ್ಯಕವಾದ ವಿಷಯವನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದ ರಲ್ಲಿ ಈ ಕಿರುಹೊತ್ತಗೆಗಳು ಬಹಳ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿವೆ.

ಈ ಕಿರುಹೊತ್ತಗೆಗಳು ತುಂಬ ಜನಪ್ರಿಯವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭ ಬೆಲೆಯ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಜನರು ಅತ್ಯುತ್ಸಾಹದಿಂದ ಕೊಂಡು ಓದುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ಗಳಿಗೆ ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಮಾರಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹೋದಾಗ,

ವಸ್ತುಪ್ರದರ್ಶನಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟಕ್ಕೆ ಇಟ್ಟಾಗ, ಜನರು ಆದರದಿಂದ ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದು ಈ ಮಾಲೆಯ ಜನಪ್ರಿಯತೆಗೆ ಸಾಕ್ಷಿಯಾಗಿದೆ. ಸುಲಭ ಬೆಲೆ, ಗಹನವಾದ ವಿಷಯ; ಅಗ್ಗದ ಬೆಲೆ, ಅಗ್ಗಳವಾದ ವಿಷಯ ಎಂದು ಜನರು ಹೇಳುವ ಮೆಚ್ಚುಗೆಯ ಮಾತುಗಳು ಎಲ್ಲ ಕಡೆಗಳಿಂದಲೂ ಕೇಳಿಬರುತ್ತಿವೆ. ಇಂತಹ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಮೂವತ್ತೇಳು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಈಗ ಪ್ರಕಟವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ನನಗೆ ಬಹಳ ಸಂತೋಷವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಈಗ ಹೊರಬೀಳುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀ ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ ಅವರ "ಗಣಿತ ಎಂದರೇನು ?" ಹೆಚ್ಚು ಜನಪ್ರಿಯ ವಾಗಲೆಂದು ನಾನು ಆಶಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಮೈಸೂರು
೧೨–೧೦–೧೯೬೮

ಕೆ. ಎಲ್. ಶ್ರೀಮಾಲಿ
ವೈಸ್-ಛಾನ್ಸಲರ್

ನನ್ನ ಮಾತು

ಡಾ|| ವಿ. ಎಸ್. ಹುಸೂರ್ ಬಸಾರ್ ಬರೆದಿರುವ "*What is Mathematics?*" ಎಂಬ ಪುಟ್ಟ ಪುಸ್ತಕವು ಗಣಿತದ ಹಲವು ಮೂಲ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬೆಳಕಿಗೆ ತಂದಿದೆ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸತ್ಯತೆ ಎಂದರೇನು, ಅನಂತ ಎಂದರೇನು ಮತ್ತು ಗಣಿತದ ರೀತ್ಯಾ ಪರ್ಯಾಲೋಚನೆ ಎಂಬ ಮೂರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅವರು ಜನಸಾಮಾನ್ಯರೂ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಆರಿಸಿರುವ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಿತ್ಯಜೀವನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟುವಾದ ಕಾರಣ ಓದುಗರ ಆಸಕ್ತಿಯು ಮತ್ತಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಮಟ್ಟದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವವರಿಗೂ ಯೋಚನಾಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಕುದುರಿಸುವಂತಹ ಅಂಶಗಳು ಈ ಹಲವು ಪುಟಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುತ್ತವೆ. ಹೈಸ್ಕೂಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಾದಿಯಾಗಿ ಸರ್ವರೂ ಇದರ ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾರೆಂಬುದಾಗಿ ನಾನು ನಂಬಿದ್ದೇನೆ.

ತಮ್ಮ ಉಪನ್ಯಾಸಗಳ ಮೂಲಕ ನನ್ನ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆರಳಿಸಿದ ಡಾ|| ಹುಸೂರ್ ಬಸಾರ್ ಅವರಿಗೂ, ಇದನ್ನು ಅನುವಾದ ಮಾಡಲು ನನಗೆ ಸೂಚನೆ ಇತ್ತು, ಪ್ರಕಟಿಸಿದ ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ನನ್ನ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು.

೧೯೬೮
ಮೈಸೂರು

ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ

೧. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸತ್ಯತೆ ಎಂದರೇನು ?

'ಅತ್ಯಂತ ಸ್ಪಷ್ಟವೂ, ಸುಂದರವೂ ಆದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಗತಿಯು ಯಾವ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಗಣಿತದ ರೂಪವನ್ನೇ ತಾಳ ಬೇಕು'.

—ಥಾರೋ (Thoreau)

'ಸತ್ಯ ಎಂದರೇನು ?' ಪೈಲೇಟ (Pilate) ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಯೇಸುಕ್ರಿಸ್ತನನ್ನು ಕೇಳಿದನು, ಆದರೆ ಉತ್ತರಕ್ಕಾಗಿ ಕಾಯಲಿಲ್ಲ. ವೇದಾಂತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಅತ್ಯಂತ ಗಾಢವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಪ್ರಾಯಶಃ ಹೀಗಿವೆ : ಯಥಾರ್ಥತೆ ಎಂದರೇನು ? ಮನುಷ್ಯನು ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಲ್ಲನು ? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ಅಂತಿಮವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವಾದರೂ ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಮಾಡಿರುವ ಕಾರ್ಯವು ಅಗಾಧವಾದುದು. 2000 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಮನುಷ್ಯನು ಶೋಧಿಸಿ ತೆಗೆದ ಸತ್ಯತೆಗಳ ಪೈಕಿ ಗಣಿತವು ಉತ್ತಮೋತ್ತಮ ನಿದರ್ಶನವಾಗಿತ್ತು. ಆದ ಕಾರಣ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಡೆಸಿದ ಪ್ರಯತ್ನಗಳೆಲ್ಲ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧವಾಗಿಯೇ ಇದ್ದುವು. ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಗಣಿತವು ಪುರಸ್ಕಾರ ಪಡೆದಿದ್ದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಹೀಗಿದೆ : ಆ ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನದ ಹೇಳಿಕೆಗಳೆಲ್ಲ ಕೊಂಚಮಟ್ಟಿಗೆ ವಿವಾದಾಸ್ಪದವಾಗಿದ್ದು ಹೊಸ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಉರುಳಿ ಹೋಗಬಹುದು ; ಆದರೆ ಗಣಿತದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು*

---

* ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ 'ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ' ಎನ್ನುವ ಪದವು 'ಹೇಳಿಕೆ' ಅಥವಾ 'ನಿರೂಪಣೆ' ಎಂಬ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆಯೇ ವಿನಾ 'ಶಪಥ' ಅಥವಾ 'ದೃಢಸಂಕಲ್ಪ' ಎನ್ನುವ ಅರ್ಥದಲ್ಲಲ್ಲ.

ಮಾತ್ರ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಪರಮ ಸತ್ಯ ಮತ್ತು ನಿರ್ವಿವಾದ ಎಂಬುದಾಗಿ ಅಂಗೀಕೃತವಾಗಿವೆ.

ಸಾಧಾರಣ ಮನುಷ್ಯನೂ ಕೂಡ ಗಣಿತದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ತನ್ನ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಭಯ ಮತ್ತು ಗೌರವಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತಾನೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಗಣಿತವು ಸತ್ಯಾಂಶಗಳ ವಿಷಯ ಎಂಬ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ನಂಬಿಕೆ ಅವನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ನಿಜವು ಸಮಂಜಸವಾಗಿರುತ್ತದೆಯಾದ ಕಾರಣ ಗಣಿತವೂ ಸಾಮಂಜಸ್ಯದ ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ನಿದರ್ಶನ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಅವನು ಒಪ್ಪುತ್ತಾನೆ. ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಈ ಹೆಚ್ಚಿನ ಖ್ಯಾತಿ ಬರಲು ಮತ್ತೊಂದು ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ : ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ರೀತಿಯಾದ ಸ್ಥಾಯಿತ್ವ ಮತ್ತು ದೃಢತೆ ಬಂದಿರು ವುದು ಗಣಿತದ ಕಾರಣದಿಂದ ಮಾತ್ರ. ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಬಹುವಾಗಿ ಟೀಕಿಸಿದ ಜಾರ್ಜ್ ಬರ್ನಾರ್ಡ್ ಷಾ (George Bernard Shaw) ಕೂಡ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಪುರಸ್ಕಾರ ಕೊಡುತ್ತಿದ್ದನು. ತನಗೆ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಗಣಿತದ ಜ್ಞಾನವಿಲ್ಲದುದಕ್ಕಾಗಿ ವ್ಯಥೆಪಟ್ಟುದುದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತನಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಹುಟ್ಟಿಸದಿದ್ದುದಕ್ಕಾಗಿ ಅವನು ತನ್ನ ಗಣಿತದ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರನ್ನು ನಿಂದಿಸುತ್ತಿದ್ದನು.

'$1+1=2$', 'ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಸಮಕೋನಗಳು', ಇತ್ಯಾದಿ ಗಣಿತದ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಗಣಿತವು ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ನಂಬಿಕೆ ಜನಸಾಮಾನ್ಯರಿಗಿರು ತ್ತದೆ. ಆದರೆ 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಹಲವು ಅಶ್ಚರ್ಯಕರ ಪ್ರಗತಿಗಳ ಕಾರಣ ಗಣಿತದ ರೀತಿನೀತಿಗಳ ವಿಚಾರವಾಗಿ ನಮ ಗಿದ್ದ ಭಾವನೆ ಪೂರಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೊಂದಿತು.

ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಗಣಿತದ ಪ್ರತಿ ಶಾಖೆಯೂ ಹಲವು ಗೊತ್ತಾದ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣ (axioms) ಗಳಿಂದ ಶುರುವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸತ್ಯತೆ ತಾನಾಗಿಯೇ ಎದ್ದು ಕಾಣುತ್ತಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಸಿದ್ಧ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ತರ್ಕದ ರೀತ್ಯಾ ಹಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಹೊರಬೀಳುತ್ತವೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಗೇ ಪ್ರಮೇಯ (theorems) ಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಈ ತರ್ಕದ ರೀತಿ ಏನು ? ವಿಚಾರ ಶಕ್ತಿಯ ನಿಯಮಗಳು ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಮೂರು ನಿಗಮನ ತರ್ಕ (deductive logic)ದ ಮೂಲ ತತ್ತ್ವಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಅರಿಸ್ಟಾಟಲ್ (Aristotle) 2000 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ರೂಪಿಸಿದನು. ತರ್ಕದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಆ ಮೂರು ತತ್ತ್ವಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

1. ಒಂದು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು ತಾನು ಹೇಗಿದೆಯೋ ಅದನ್ನೇ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. (ಅನನ್ಯತೆಯ ತತ್ತ್ವ)

2. ಪ್ರತಿ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯೂ ನಿಜ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳು. (ಮಧ್ಯಮ ಬಹಿಷ್ಕಾರ ತತ್ತ್ವ)

3. ಯಾವ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯೂ ನಿಜ ಮತ್ತು ಸುಳ್ಳು ಎರಡೂ ಆಗಿರಲಾರದು. (ಅಸಮಂಜಸತೆಯ ತತ್ತ್ವ)

ಸರಿಯಾದ ನಿರೂಪಣೆಗೆ ತರ್ಕದ ನಿಯಮಗಳು ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕ. ನೇರ (ಅಂದರೆ ವಕ್ರವಲ್ಲದ) ಪರ್ಯಾಲೋಚನೆಗೆ ಅವು ಅತ್ಯಗತ್ಯ. ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ನಾವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೇವಲ ಕೆಲವು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಂದ ಹೇಗೆ ನೂರಾರು ಪ್ರಮೇಯ

ಗಳು ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರ. ಈ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಸಿದ್ಧ ನಿಯಮಗಳಾದಲ್ಲಿ ತರ್ಕದ ರೀತ್ಯಾ ಅವುಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಲಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

ಈಗ ನಾನು ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ತಿಳಿದು ಬಂದಿರುವ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಕೇವಲ ಪೂರ್ವ ಭಾವನೆಗಳೇ (presumptions) ವಿನಾ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವಲ್ಲ ಎಂಬ ಹೊಸ ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುತ್ತೇನೆ. ಇದನ್ನು ಕೇಳಿ ನಿಮಗೆ ಗಾಬರಿಯಾಗಬಹುದು. ಹದಿಮೂರು ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದಾಗಿರುವ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತ(Euclid's Geometry)ವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧತೆ ಎಷ್ಟಿದೆ ಎಂದರೆ ಯಾವ ಬುದ್ಧಿವಂತ ವ್ಯಕ್ತಿಯೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಿಸಲು ಧೈರ್ಯ ಹೊಂದಿರಲಾರ. ಈ ಭದ್ರವಾದ ತಳಹದಿಯಿಂದ ಅನೇಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಬಂದು ಅವುಗಳೂ ಕೂಡ ಆ ಅಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಷ್ಟೇ ಹಿತವಾಗಿವೆ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಸಮಕೋನಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ತ್ರಿಕೋನವೊಂದರ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನೂ ನಾವು ಅಳೆದು ಮೊತ್ತ ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಎರಡು ಸಮಕೋನಗಳು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಸರಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಸುಮಾರು 2000 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲದ ಪ್ರಗತಿ ಮತ್ತು ಉಪಯೋಗಗಳ ನಂತರ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಅಸಾಧ್ಯ ಗೌರವಾರ್ಹತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿತು. ಅಷ್ಟೇಕೆ, 1800 ರ ಹೊತ್ತಿಗೆ "ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಸತ್ಯ ಮತ್ತು ಸತ್ಯವೇ ಯೂಕ್ಲಿಡ್" ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಅಂಗೀಕೃತವಾಗಿತ್ತು. ಸುವಾರ್ತೆಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಬದಲು

ವಿದ್ಯಾವಂತರು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಮೇಲೆ ಆಣೆಯಿಟ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ ಮಾಡತೊಡಗಿದರು. ದೇವರಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೇಳುವವರೂ ಇದ್ದರು; ಆದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡನನ್ನು ನಿರಾಕರಿಸುವವರು ಮಾತ್ರ ಸಿಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮೊದಲಿನಿಂದಲೂ ಇಂತಹ ಅಪೂರ್ವ ಸ್ಥಾನ ಸಿಕ್ಕಿ ಕಾಲಕ್ರಮೇಣ ಅದು ಬೆಳೆದರೂ ಕೂಡ, ಹಲವು ಯೋಚನಾಪರರು (ಅದರಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಕೂಡ ಒಬ್ಬ) ಅಷ್ಟೇನೂ ಸಮಾಧಾನ ಪಡೆಯಲಿಲ್ಲ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡನಿಗೆ ಪ್ರಥಮ ಬಾರಿಗೆ ಸವಾಲು ಹಾಕಿದವರಾರೆಂದರೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡನೇ. ಬಾಹಿರವಾಗಿ ದೋಷರಹಿತವಾದ ಎರಡು ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳೇ ಅವನ ಮಾನಸಿಕ ಅಶಾಂತಿಗೆ ಕಾರಣವಾದುವು.

ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಮೊದಲನೆಯದು ಯಾವುದೆಂದರೆ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ಲಂಬಿಸಬಹುದು. ಎಂಬುದು. ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ 13ನೆಯ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವಾದ ಎರಡನೆಯದು ಹೀಗಿದೆ: ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಹೊರಗಡೆ ಇರುವ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಆ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಭೌತಿಕ ಜಾಗದೊಡನೆ ನಮಗಿರುವ ಅನುಭವದ ಕಾರಣದಿಂದ ನಾವು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿದ್ದೇ ಆದರೆ, ಈ ಸೂತ್ರಗಳು ಶಂಕೆಗೀಡಾಗುತ್ತವೆ. ಭೂಮಿಯಿಂದ ಹಲವು ಮೈಲಿಗಳಿಂದಾಚೆ ಇರುವ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಏನಾಗುತ್ತದೆಂಬ ಅನುಭವ ನೇರವಾಗಿ ಯಾರಿಗೂ ಇಲ್ಲ. ನಾವು ಓಡಾಡುವ ಈ ಮಿತ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ನಿಜವೆಂಬುದಾಗಿ ತೋರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಈ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಸಂಶಯವನ್ನು ಅವುಗಳನ್ನು ತಾನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆಂಬುದು ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹೆಚ್ಚು ಅನುಮಾನಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಅವನು ಅವುಗಳ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೆ ಆದಷ್ಟು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ತನಕ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಮಿತವಾಗಿ ಲಂಬಿಸಬಹುದೆಂಬ ವಿಚಾರದಲ್ಲೂ ಅವನು ಅಷ್ಟೇ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದಿದ್ದಾನೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ ರೇಖೆಯ ಭಾಗಗಳು ಎಂದರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಅಂಶ—ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಅವನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾನೆಯೇ ಹೊರತು, ಶುರುವಿನಲ್ಲಿಯೇ ಅನಂತ ಉದ್ದದ ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಂಬುದರ ತಂಟೆಗೇ ಹೋಗಿಲ್ಲ. ಆವಶ್ಯಕವಾದಾಗ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ದೂರ ಮಾತ್ರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವ ಕಡೆಗೆ ಬೇಕಾದರೂ ವೃದ್ಧಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ ಅಷ್ಟೇ. ಇತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಎರಡು ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡನು ಮಾಡಿದ ಪ್ರಯತ್ನ ವಿಫಲವಾಯಿತು. ನಾವು ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಅಸಮರ್ಥರಾದರೆ 'ಅದು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ, ಆದಕಾರಣ ಅದಕ್ಕೆ ಸಾಧನೆ ಬೇಕಿಲ್ಲ' ಎನ್ನುವುದು ನಮಗೆ ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿಬಿಟ್ಟಿದೆ. ಬರ್ಟ್‌ರ್ಯಾಂಡ್ ರಸಲ್ (Bertrand Russel) ಹೇಳಿರುವಂತೆ "ಸ್ಪಷ್ಟತೆಯು ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿರುವುದರ ಶತ್ರು."

ಸುಮಾರು 2000 ವರ್ಷಗಳ ತನಕ ಉತ್ತಮೋತ್ತಮ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಉಳಿದ ಹನ್ನೆರಡು ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯ

ದಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಮಾಡಿದ ಅನೇಕ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಿಷ್ಫಲವಾದುವು. 1800ರ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವು "ರೇಖಾಗಣಿತದ ಕಳಂಕ" ಎನ್ನಿಸಿ ಕೊಂಡುಬಿಟ್ಟಿತು. 18ನೆಯ ಶತಮಾನದ ರೋ.ಕ್ಯಾ. ಕ್ರೈಸ್ತ ಮಂಡಲಿಯ ಸಾಖೇರಿ (Saccheri) ಎಂಬ ಪಾದ್ರಿಯೊಬ್ಬನು ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಹೊಸ ದೊಂದು ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆಸಿದನು. ಅವನ ರೀತಿ ಹೀಗಿದೆ; ಸಮಾಂ ತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವು ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ ನಮಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾ ಗಣಿತವು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವು ನಿಜವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಈ ಎರಡರಲ್ಲೊಂದು ಸಾಧ್ಯತೆ ನಮ್ಮ ಮುಂದೆ ಇರುತ್ತದೆ—

ಸಾಧ್ಯತೆ 1. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಸಾಧ್ಯತೆ 2. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನಾದರೂ ಎಳೆಯ ಬಹುದು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಈ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡು ಉಳಿದ 12 ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಿಗಮನ ತರ್ಕದ ರೀತ್ಯಾ ಬರಬಹುದಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಾಖೇರಿ ಪ್ರಯತ್ನ ಪಟ್ಟನು. ಸಾಧ್ಯತೆ (1)ನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಿದ್ದೇ ಆದರೆ ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧಿಸುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆಂಬುದಾಗಿ ಸಾಖೇರಿಗೆ ತಿಳಿದುಬಂದಿತು. ಹೀಗಾಗಿ ಸಾಧ್ಯತೆ (1)ನ್ನು ಕೈಬಿಡಬೇಕಾ ಯಿತು. ಸಾಧ್ಯತೆ (2)ನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡಲ್ಲಿ ಹಲವು ವಿಚಿತ್ರ

ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವನು ಅರಿತನು —ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ : ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಸಮಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ. ಅಲ್ಲದೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಗಾತ್ರ ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆಲ್ಲ ಅದರ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರ ಸಂಗತಿ ಏನೆಂದರೆ : ಹಲವು ವಿಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದಿಂದ ಭಿನ್ನವಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಆದುವೇ ವಿನಾ ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವೆರಡಕ್ಕೂ ವಿರೋಧವಿರಲಿಲ್ಲ.

ಸಾಖೇರಿಯು ಇನ್ನೇನು ಹೊಸ ಯುಗಾರಂಭದ ಘಟನೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದ್ದನು ; ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಲು ಅವನು ಹಿಂದೆಗೆದುಬಿಟ್ಟನು. ಸಾಧ್ಯತೆ (2)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದರಿಂದ ಬಂದ ವಿಚಿತ್ರ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಅವನು ಸಾಧ್ಯತೆ (2) ಎಂಬುದೇ ತಪ್ಪೆಂದೂ, ಆದಕಾರಣ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರಸೂತ್ರವೇ ಸರಿಯೆಂದೂ ತೀರ್ಮಾನಿಸಿಕೊಂಡನು. ಹೀಗಾಗಿ 1733 ರಲ್ಲಿ ಅವನು "ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ನಿರ್ದೋಷಿ" (Euclid vindicated from all defects) ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದ ಮೂಲಕ ತನ್ನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದನು. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿದುಬರುವ ಒಂದು ನೀತಿ ಏನೆಂದರೆ : ಒಬ್ಬನನ್ನು ನಿರ್ದೋಷಿ ಎಂದು ಸಾರಲು ಹೊರಟಾಗ ನಿಜಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ನಾವು ನಿರಾಕರಿಸುವ ಸಂಭವ ಹೆಚ್ಚು.

ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ ಸಾಖೇರಿ ಮತ್ತಿತರ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಉತ್ತಮ ಪಂಡಿತರಾದರೂ ಕೂಡ 2000 ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಜನರ ಮನಸ್ಸನ್ನು ಹಿಡಿದು

ನಿಲ್ಲಿಸಿದ್ದ ಈ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಎದುರಿಸಿ ನಿರಾಕರಿಸುವಷ್ಟು ಧೈರ್ಯ ಅವರಿಗಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ 19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆದಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಆದ ಬೌದ್ಧಿಕ ಮನೋಭಾವದ ಬದಲಾವಣೆಯ ಕಾರಣದಿಂದ ಮೂಲ ನಂಬಿಕೆಗಳ ತೀವ್ರ ಪುನರಾಲೋಚನೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. ಸಾಖೇರಿಯ ಕಾರ್ಯದ ಸರಿಯಾದ ಗೂಢಾರ್ಥವನ್ನು ಗಾಸ್ (Gauss), ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕೀ (Labatchevsky) ಮತ್ತು ಬಾಲ್ಯಾಯಿ (Bolyai) ಎಂಬ ಮೂವರು ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆ ಒಂದೇ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆದರೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

ಸಾಖೇರಿಯ ಸಾಧ್ಯತೆ (2)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಗಾಸ್ ಆ ವಿಚಿತ್ರ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಪಡೆದನು. ಪ್ರಮೇಯಗಳ ವೈಚಿತ್ರ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಅವನು ಹೆದರಲಿಲ್ಲ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದಷ್ಟೇ ಭದ್ರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಇತರ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳೂ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬ ಭಾರಿ ಅಂಶವನ್ನು ಅವನು ಮನಗಂಡನು.

ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತ (Non-Euclidean Geometry)ವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವಷ್ಟು ಮಾನಸಿಕ ಧೈರ್ಯವನ್ನು ಗಾಸ್ ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಅದನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುವಷ್ಟು ನೈತಿಕ ಧೈರ್ಯ ಅವನಿಗಿರಲಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಅದನ್ನು ಕಂಡು ಜನಸಾಮಾನ್ಯರು ಅವನನ್ನು ಹುಚ್ಚ ಎಂದುಬಿಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಗಾಸನ ಮರಣಾನಂತರ ಅವನ ಕಾಗದಗಳ ಪೈಕಿ ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅವನ ಲೇಖನಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದುವು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಬೇರೆ ರೇಖಾಗಣಿತವೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸಾರಿದ ವೇದಾಂತಿ ಕ್ಯಾಂಟ್ (Kant) ಇವನ ಹಿಂಬಾಲಕರಾಗಿ

19ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಆದಿಭಾಗದ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಕಾಲಕಳೆದರು.

ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಗೌರವಾರ್ಹವಾದ ಇನ್ನಿಬ್ಬರ ಪೈಕಿ ಮೊದಲನೆಯವನು ರಷ್ಯಾ ದೇಶದ ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕೀ. ಅವನು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕನಾಗಿದ್ದನು. ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರದ ಸಾಧ್ಯತೆ (2)ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತಾನು ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯವನ್ನು 1832 ರಲ್ಲಿ ಧೈರ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ್ದಲ್ಲದೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತವಲ್ಲದೆ ಅಷ್ಟೇ ಸರಿಯಾದ ಇತರ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳೂ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಾದಿಸಿದನು.

ಎರಡನೆಯವನು ಹಂಗೇರಿ ದೇಶದ ಬಾಲ್ಯಾಯಿ. ಅವನೊಬ್ಬ ಸೇನಾಧಿಕಾರಿ. ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕಿಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೇ ಅವನಿಗೂ ಸಿಕ್ಕಿ ಅವನು ಅವನ್ನು 1833 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದನು. ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕೀ ಮತ್ತು ಬಾಲ್ಯಾಯಿ ಇವರುಗಳ ನವ ಯುಗಾರಂಭದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಆಗಿನ ಕಾಲದ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಮತ್ತು ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಪೂರಾ ತಿರಸ್ಕಾರಭಾವನೆಯಿಂದ ಕಂಡರೆಂಬುದು ತಿಳಿಯಲರ್ಹವಾದ ವಿಷಯ. ಕೊಂಚಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಗಣಿತದ ಪ್ರೊಫೆಸರ್‌ಗಿರಿಯಿಂದ ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕಿಯನ್ನು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ವಜಾ ಕೂಡ ಮಾಡಿತು. ಅದೃಷ್ಟವಶಾತ್ ಬಾಲ್ಯಾಯಿ ಸೇನಾಧಿಕಾರಿಯಾಗಿದ್ದನು. ಅವನೂ ಕೂಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವೊಂದರ ಗಣಿತದ ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ಆಗಿದ್ದಿದ್ದರೆ ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕಿಯ ಹಣೆಬರಹವನ್ನು ಅವನೂ ಕೂಡ ಅನುಭವಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕಿಯ ಕಾರ್ಯ ಆದ ಕೆಲವೇ ಕಾಲದೊಳಗೆ ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ರೀಮಾನ್ (Riemann 1826–66)

ಎಂಬುವನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯ ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಅನಂತತೆಯ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅವನು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿದನು. ಅವನ ನೂತನ ಯೋಚನೆಗಳಲ್ಲೊಂದು ಏನೆಂದರೆ ತುದಿ ಮೊದಲಿಲ್ಲದಿರುವಿಕೆ (endlessness) ಮತ್ತು ಅನಂತತೆ (infinity) ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ: ಭೂಮಿಯ ಸಮಭಾಜಕವೃತ್ತಕ್ಕೆ ತುದಿಮೊದಲಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅನಂತವಲ್ಲ. ಸರಳರೇಖೆಯು ಅನಂತ ಎಂಬ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ರೀಮಾನನು ಎಲ್ಲ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳೂ ಪರಿಮಿತ (finite), ಆದರೆ ಅವಕ್ಕೆ ತುದಿಮೊದಲಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹಾಕಿದನು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ರೀಮಾನನು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಯಾವ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ—ಎಂದರೆ ಸಮಾಂತರ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹಾಕಿದನು. ರೀಮಾನಿನ ಹೊಸ ಮೂರನೆಯ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವೆಂದರೆ ಎರಡುಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ಎನ್ನುವುದು. ರೀಮಾನನು ಪಡೆದ ಹಲವಾರು ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಪೈಕಿ ಕೆಲವು ಅತಿ ವಿಚಿತ್ರವಾಗಿದ್ದುವು. ಆದರೆ ಯಾವೆರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧಿಸಲಿಲ್ಲ. ಅವನು ನಿರೂಪಿಸಿದ ಒಂದು ವಿಚಿತ್ರ ಪ್ರಮೇಯ ಹೀಗಿದೆ: ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಸಮಕೋನಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಜಾಸ್ತಿ; ಅಲ್ಲದೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಗಾತ್ರವು ಕಮ್ಮಿಯಾದಂತೆಲ್ಲ ಆ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕಮ್ಮಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ರೀಮಾನನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿಶೇಷತೆ ಏನೆಂದರೆ ಅದು ಈ ಭೌತಿಕ ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ (physical world) ಬಹು ಮಟ್ಟಿಗೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಗೋಳ (Sphere)ದ ಮೇಲೆ ಸರಳ ರೇಖೆ ಎಂದರೆ ಅದರ ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ ಎಂಬುದಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ರೀಮಾನನ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಬಹುದು. ರೀಮಾನನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೂ ಗೋಳದ ದೀರ್ಘವೃತ್ತಗಳನ್ನೇ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳೆಂಬುದಾಗಿ ಕರೆದು ಅರ್ಥ ಕಲ್ಪಿಸಬಹುದು. ಅದು ಭೌತಿಕ ಪ್ರಪಂಚದ ರೇಖಾಗಣಿತ.

ಮನುಷ್ಯನು ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುತ್ತಾನೆ. ಈ ಭೂಮಿಯನ್ನು ಮೂರು ಪರಿಮಾಣಗಳ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗೋಳ ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳದೆ ನೇರವಾಗಿ ಈ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ ರೇಖಾಗಣಿತವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಲು ನಾವು ಹೊರಡುತ್ತೇವೆಂತ ಭಾವಿಸಿ. ಆಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ರೇಖಾಗಣಿತವು ರೀಮಾನನ ರೇಖಾಗಣಿತವಲ್ಲದೆ ಬೇರೊಂದಲ್ಲ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಕೂಡ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಶತಮಾನದ ಆದಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್ (Einstein) ತನ್ನ ಸಾಪೇಕ್ಷ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಬೆಳಸಿ, ಜಾಗವು ಗೋಳಾಕಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾರಿ ವಿಶ್ವದ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೋಸ್ಕರ ರೀಮಾನನ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡನು.

ವಿಶ್ವದ ಸಾಕಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದಾದ ಜಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೂ, ರೀಮಾನನ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿರುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬ ಅಂಶ ತಿಳಿಯು

ಲರ್ಹವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ : ರೀಮಾನನ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲೂ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಮತ್ತು ಕೊಂಚ ಮಾತ್ರ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ) ಆದರೆ ವಿಶ್ವದ ಸಾಕಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ರೀಮಾನನದಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಸಮಕೋನಗಳಿಗಿಂತ ಬಹು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದರಿಂದ ಗಣಿತವು ಸತ್ಯವನ್ನೇ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಬಹು ಹಳೆಯ ನಂಬಿಕೆ ಅಲುಗಾಡಲು ಪ್ರಾರಂಭವಾಯಿತು. ಪ್ರಾಚೀನ ಸಮಾಜದಲ್ಲಿ ಮತಾಚರಣೆಯಿದ್ದಂತೆಯೇ ಗಣಿತವೂ ಒಂದು ಗೌರವಯುತ ಮತ್ತು ಸವಾಲಿಗೆ ಸಿಕ್ಕದ ಸ್ಥಾನಮಾನವನ್ನು ಗಳಿಸಿತ್ತು. ಗಣಿತದ ದೇವಾಲಯದಲ್ಲಿ ನಿಜವೆಲ್ಲವೂ ತುಂಬಿದ್ದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಅದರ ಪ್ರಮುಖ ಪೂಜಾರಿಯಾಗಿದ್ದನು. ಆದರೆ ಲಾಬಾಚೇಪ್‌ಸ್ಕೀ, ಬಾಲ್ಯಾಯಿ ಮತ್ತು ರೀಮಾನ್ ಈ ಮೂವರ ಕಾರ್ಯದ ಫಲವಾಗಿ ಆ ಪಂಥ, ಅದರ ಪೂಜಾರಿ ಮತ್ತು ಅವನ ಅನುಯಾಯಿಗಳೆಲ್ಲರೂ ದೈವಬಲದಿಂದ ಹೊರಕ್ಕೆಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟರು. ಸಮಾಂತರ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಸವಾಲು ಹಾಕುವುದರ ಮೂಲಕ ಈ ಮೂವರು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಸತ್ಯಕ್ಕೇ ಸವಾಲು ಹಾಕಿದಂತಾಯಿತು.

ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸೃಷ್ಟಿಯ ಕಾರಣದಿಂದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲ ಎಂಬ ಅಂಶ ಬೆಳಕಿಗೆ ಬಂತು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ಅಥವಾ ಮತ್ತಿತರ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳೇ ಆಗಲಿ, ಅವನ್ನು ಸತ್ಯ

ವೆಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಸುಮ್ಮನೆ ಒಪ್ಪಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹಳೆಯ ಉಪದೇಶವೊಂದಿದೆ : 'ನಿಮ್ಮ ಸ್ನೇಹಿತರ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯಿಂದಿರಿ, ನಿಮ್ಮ ಶತ್ರುಗಳಿಂದ ದೂರವಿರುವುದು ಸುಲಭ.' ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಉಪದೇಶವೆಂದರೆ : ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುವುದರ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಶಂಕೆ ಇರಲಿ, ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಅಂಶಗಳು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಿಮ್ಮನ್ನು ಬಿಕ್ಕಟ್ಟಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿಸುವುದಿಲ್ಲ.'

ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳ ಒಂದು ನಿಧಿ ಎಂಬುದಾಗಿ ಇದ್ದ ಖ್ಯಾತಿ ಹೋದಂತಾದರೂ, ಅದು ಮನುಷ್ಯನ ಬುದ್ಧಿಬಲವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಈ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಅವನ ಮನಸ್ಸು ಬಂಧನಗಳಂತಿದ್ದ ಅಭ್ಯಾಸ, ಸಹಜ ಜ್ಞಾನ, ಇಂದ್ರಿಯಗಳ ಗ್ರಹಣಶಕ್ತಿ, ನಂಬಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಪೂರ್ವಕಲ್ಪಿತ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಿ ಮುನ್ನುಗ್ಗಬೇಕಾಯಿತು. ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ದೈವಾಂಶವೇನೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬುದೂ, ಅದು ಕೇವಲ ಮಾನವ ಕಲ್ಪಿತ ವಿಷಯವೆಂಬುದೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತು. ಗಣಿತವು ಅಪರಿಪೂರ್ಣ ಮಾನವ ಮನಸ್ಸಿನ ಕಲ್ಪನೆ. 'ಆಧುನಿಕ ಕಾಲದ ಶುದ್ಧಗಣಿತ (Pure Mathematics)ವು ಮನುಷ್ಯನ ಅತ್ಯಂತ ಸ್ವತಂತ್ರ ಕಲ್ಪನಾಶಕ್ತಿಯ ಒಂದು ಸೃಷ್ಟಿ' ಎಂಬುದಾಗಿ ವೈಟ್‌ಹೆಡ್ (Whitehead) ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸೃಷ್ಟಿಯು ಗಣಿತವನ್ನು ಸತ್ಯದ ಪೀಠದಿಂದ ನೂಕಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ್ಯೂ ಆ ಸೃಷ್ಟಿಯು ಗಣಿತದ ಚಲನೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವನ್ನು ದೊರಕಿಸಿಕೊಟ್ಟಿತು. ಲಾಬಾಚೇಫ್‌ಸ್ಕಿ, ಬಾಲ್ಯಾಯಿ ಮತ್ತು ರೀಮಾನ್ ಇವರ

ಕಾರ್ಯದ ಫಲವಾಗಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು ತಮ್ಗಿಷ್ಟ ಬಂದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಓಡಾಡಲು ಅವಕಾಶ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಸತ್ಯ ಎಂಬುದರ ಬಂಧನದಿಂದ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಮುಕ್ತಿ ದೊರಕಿತು. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ವಂತ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ಬಂದು ಅದರ ಶಕ್ತಿ ಮತ್ತು ಅಂತಸ್ತು ಹೆಚ್ಚಿದುವು.

ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಈಗ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳೆಂಬುದಾಗಿ ಭಾವಿಸದೆ ಅವನ್ನು ಕೇವಲ ಸಾಧಿತವಾಗಿರದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳೆಂಬುದಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ ; ಅವನ್ನು ಯಾವ ಯಾವ ಕಡೆಗೂ ಕಟ್ಟು ಬೀಳದಿರುವ "ಕಲ್ಪನೆಗಳು" ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಕರೆಯಬಹುದು. ಯಾವ ಕಲ್ಪನೆಗಳಿಂದ ಬೇಕಾದರೂ ನಾವು ಹೊರಟು ಅವುಗಳಿಂದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ನಮ್ಮ ಕಲ್ಪನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧಿಸದಿದ್ದರೆ ಸಾಕು, ಎಲ್ಲವೂ ಸರಿಯಾದಂತೆಯೇ. ಗಣಿತ ದೇವರ ಸತ್ಯ ಎಂಬ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಎಂಬುದು ಬಂದಂತಾಯಿತು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಹೊಸ ರೇಖಾಗಣಿತಗಳು ಆದಂತೆಯೇ, ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಬಂದಿರುವ ಅಥವಾ ಚಿರಸಮ್ಮತ ಬೀಜಗಣಿತ (classical Algebra)ದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೂತನ ಬೀಜಗಣಿತಗಳು ಹುಟ್ಟಿಕೊಂಡಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ : ಗುಣಾಕಾರದ ಕ್ರಮ ವಿನಿಮೇಯ ನಿಯಮ (commutative law of multiplication) ಎಂದರೆ $a \times b = b \times a$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರಾಕರಿಸಿ, $a \times b$

ಎಂಬುದು $b \times a$ ಎಂಬುದರಿಂದ ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡರೆ ನೂತನ ಬೀಜಗಣಿತವೊಂದು ಆಗುವುದು. ಚಿರ ಸಮ್ಮತ ಬೀಜಗಣಿತದ ಅನೇಕ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಂಡು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಹೊಸ ಬೀಜಗಣಿತಗಳು ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗಿವೆ. ಜಾರ್ಜ್ ಕಾಂಟಾರ್ (George Cantor) ಹೇಳಿರುವಂತೆ "ಗಣಿತದ ಸಾರ ಏನೆಂದರೆ ಅದರ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ".

ಈ ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತವು ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಸ್ತ್ರೀಯಂತೆ. ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತವು ಈಗಿನ ಕಾಲದ ಸ್ತ್ರೀಯಂತೆ. ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದ ಹೆಂಗಸು, ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದ ಗಣಿತವು ಸತ್ಯವನ್ನು ತನ್ನ ದೇವರೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದಂತೆ, ತನ್ನ ಪತಿಯನ್ನು ದೇವರೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದಳು. ಆಧುನಿಕ ಹೆಂಗಸು ತನ್ನ ಗಂಡನನ್ನು ತನ್ನ ದೇವರೆಂದು ಭಾವಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ತನ್ನ ಒಪ್ಪು ತಪ್ಪುಗಳ ಪ್ರಜ್ಞೆ ತನಗೆ ಮಾರ್ಗ ದರ್ಶಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡು, ಅವಳು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವನ್ನು ಅನುಭವಿಸಿ, ತನ್ನದೇ ಆದ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವವೊಂದನ್ನು ಹೊಂದಿ, ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಗತಿಶೀಲಳಾಗಿದ್ದಾಳೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತವು ಸತ್ಯವನ್ನು ತನ್ನ ದೇವರೆಂದು ಭಾವಿಸುವುದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಎಂಬ ತನ್ನದೇ ಆದ ಪ್ರಜ್ಞೆಯ ಬೆಳಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ, ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಿದೆ.

ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಅವಕಾಶವಿದೆ. ಆದರೆ ಒಂದು ನಿರ್ಬಂಧವಿದೆ: ಗಣಿತದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಶಾಖೆಯ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು; ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಗಡಿಬಿಡಿಯುಂಟಾಗುವುದು. ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯೆಂದರೆ ಆ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಮಾತ್ರ ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋ

ಧಿಸಬಾರದೆಂಬರ್ಥವಲ್ಲ, ಅವುಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಲಭಿಸಬಹುದಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಪೈಕಿ ಕೂಡ ಯಾವೆರಡೂ ಒಂದನ್ನೊಂದು ವಿರೋಧಿಸಬಾರದು.

ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯ ಷರತ್ತು ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯನ್ನು ತಾಳುತ್ತಿದೆ. ಗಣಿತಜ್ಞರು ತಮ್ಮ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನೂ ಶೇಕಡ 100 ಭಾಗ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದಾಗಿ ಭಾವಿಸಿದ್ದತನಕ, ಅವರಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬ ಯೋಚನೆಯು ಕೂಡ (ತರ್ಕದ ತಪ್ಪಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಬಿಟ್ಟು) ಹೊಳೆದಿರಲಿಲ್ಲ. ಅಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸೃಷ್ಟಿಯ ಕಾರಣದಿಂದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ತಾವು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ತಮ್ಮ ಕಾಲ ಮೇಲೆಯೇ ನಿಲ್ಲಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಅರಿತರು. ಅವರು ಪ್ರಕೃತಿಯನ್ನು ವರ್ಣಿಸುವ ಗೋಜಿಗೆ ಹೋಗದೆ, ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಅಲ್ಲದೆ ಒಂದು ವಿವರಣೆಯು ಕೇವಲ ತಪ್ಪು ಮಾತ್ರ ಅಲ್ಲ, ಸಾಮಂಜಸ್ಯವನ್ನು ಕೂಡ ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇತ್ತು.

ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದಾದ ಯಾವುದೇ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾದರೂ ಹಲವು ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಅಥವಾ ಪೂರ್ತಿ ವಿವರಣೆಯಿಲ್ಲದ ಪದಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ : ರೇಖಾಗಣಿತ ದಲ್ಲಿ 'ಬಿಂದು' ಮತ್ತು 'ರೇಖೆ'. ಈ ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೊಂಚ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ತಾಳಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅರ್ಥ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಒಂದು ಅಂತರ್ದೇಶೀಯ ಸಂಮೇಳನದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ ಹಲವಾರು ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ರಾಜಕಾರಿಣಿಗಳು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿಕೊಂಡರು. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕಂಡ

ತತ್ತ್ವಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಅವರು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡರು :

(a) ಯಾವೆರಡು ದೇಶಗಳು ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಾದರೂ ಇರತಕ್ಕದ್ದು.

(b) ಯಾವೆರಡು ದೇಶಗಳು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿರಕೂಡದು.

(c) ಯಾವೆರಡು ಸಮಿತಿಗಳಿಗೆ ಕಡೆಯಪಕ್ಷ ಒಂದು ದೇಶವಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯ (Common) ವಾಗಿರಬೇಕು.

(d) ಪ್ರತಿ ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಮೂರು ದೇಶಗಳಾದರೂ ಇರತಕ್ಕದ್ದು.

(e) ಮೂರು ದೇಶಗಳ ಪ್ರತಿ ಗುಂಪೂ ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಾದರೂ ಇರತಕ್ಕದ್ದು.

ರಾಜಕಾರಿಣಿಗಳು ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹೊರಟಾಗ ಉಂಟಾದ ಎಡರು ತೊಡರುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ದಿಕ್ಕುತೋಚದಂತಾದರು. ಅವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೊಬ್ಬರನ್ನು ಕಂಡು ವಿಚಾರಿಸಲಾಗಿ ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹಾಕಿಕೊಂಡಿದ್ದ ಷರತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇರಲಿಲ್ಲವೆಂಬ ಅಂಶ ಗೊತ್ತಾಯಿತು. ಆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು (a)ಯಿಂದ (d)ಯವರೆಗಿನ ಷರತ್ತುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿದ್ದು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶವೇನೆಂದರೆ : 'ಯಾವ ಸಮಿತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಇರದ ಮೂರು ಮೂರು ದೇಶಗಳ ಕೂಟಗಳು ಬೇಕಾದಷ್ಟಿವೆ' ಎಂಬುದು. ಇದು ಮೇಲಿನ (e)ಯೊಡನೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿಲ್ಲ. (e) ಷರತ್ತನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಿ, ಅವಿರೋಧತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ (a), (b), (c), ಮತ್ತು (d) ಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟು

ಕೊಂಡು ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹೊರಡಬೇಕೆಂದು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಉಪದೇಶಕೊಟ್ಟರು.

ಗಣಿತಜ್ಞರು ಆ ರೀತಿ ಉಪದೇಶ ಕೊಡಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಈ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ದೇಶಗಳ ಮತ್ತು ಸಮಿತಿಗಳ ಷರತ್ತುಗಳ ರೀತಿ ಯಲ್ಲಿಯೇ ಇದ್ದುದನ್ನು ಅವರು ಕಂಡರು :

(a) ಪ್ರತಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೂ ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಾದರೂ ಇರತಕ್ಕದ್ದು.

(b) ಯಾವೆರಡು ಬಿಂದುಗಳೂ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ರೇಖೆ ಗಳ ಮೇಲೆ ಇರತಕ್ಕದ್ದಲ್ಲ.

(c) ಪ್ರತಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದಾ ದರೂ ಬಿಂದುವು ಇದ್ದೇ ಇರಬೇಕು.

(d) ಪ್ರತಿ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೂ ಕಡೆಯಪಕ್ಷ ಮೂರು ಬಿಂದು ಗಳಾದರೂ ಇರತಕ್ಕದ್ದು.

(e) ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರತಿರಾಶಿಯೂ ಕಡೆಯಪಕ್ಷ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಾದರೂ ಇರತಕ್ಕದ್ದು.

ಈ ಎರಡು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನೆಂದರೆ 'ಬಿಂದು' ಮತ್ತು 'ರೇಖೆ' ಎನ್ನುವ ಜಾಗಗಳಲ್ಲಿ 'ದೇಶ' ಮತ್ತು 'ಸಮಿತಿ' ಎಂಬ ಪದಗಳು ಬಂದಿವೆ. (a)ಯಿಂದ (e)ಯವರೆಗಿನ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಂದ ದೂರವಾಗಿವೆ. (a) ಯಿಂದ (d)ಯವರೆಗಿನವು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದ್ದು 'ಯಾವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೂ ಇಲ್ಲದ ಮೂರು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ರಾಶಿಗಳು ಅನೇಕವಿವೆ' ಎಂಬ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವೇ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರ (e)ಯನ್ನು

ವಿರೋಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದಕಾರಣ ಈ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೈಬಿಡ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮಿತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹೊರಟಾಗ ಆದ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಅರಿಯಲು ಗಣಿತಜ್ಞರು 'ಬಿಂದು' ಮತ್ತು 'ರೇಖೆ' ಎನ್ನುವ ಜಾಗಗಳಲ್ಲಿ 'ದೇಶ' ಮತ್ತು 'ಸಮಿತಿ' ಎಂದು ಬರೆದರಷ್ಟೆ. ಹೀಗಾಗಿ 'ಬಿಂದು' ಮತ್ತು 'ರೇಖೆ' ಎಂಬ ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳಿಗೆ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾದ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲದಿರುವುದು ಒಂದು ಭಾರಿ ಅನುಕೂಲವೇ ಆಯಿತು. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ನಿಗಮನ ತರ್ಕದ ಪ್ರಕಾರ ಹೋಗುವಾಗ ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳ ಅರ್ಥ ಅಪ್ರಾಕೃತ.

ಗಣಿತದ ಸ್ವರೂಪದ ನಮ್ಮ ಹೊಸ ದೃಷ್ಟಿ ಅದರ ಅರ್ಥವನ್ನೇ ಪೂರಾ ಬದಲಾಯಿಸುವಂತೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಭೌತಿಕ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳೊಡನೆ ನೇರ ಸಂಪರ್ಕ ಹೊಂದಿ, ಭೌತಿಕ ಪ್ರಪಂಚದ ಒಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ನಮಗೆ ಕೊಡುವ ಬದಲು ಗಣಿತವು 'ಅರ್ಥರಹಿತ' ಪದಗಳ ವ್ಯವಹಾರವಾಗಿ ಈಗ ತೋರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವಿಕತೆ ತೀರಾ ಭಿನ್ನವಾದುದು. ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಬೆಳೆದು, ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿಕೊಂಡು ಹಿಂದೆಂದೂ ಇಲ್ಲದಷ್ಟು ಫಲದಾಯಕವಾಗಿದೆ ಈಗಿನ ಗಣಿತ. ಹಿಂದಿದ್ದ ಗಣಿತದ ಭೌತಿಕ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಮುಂದೆಯೂ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು, ಗಣಿತದ ಕ್ರಮಗಳ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಹೊಸ ಅನೇಕ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ಕೊಡಲವಕಾಶವಾಗಿ ಗಣಿತವು ಮುನ್ನುಗ್ಗುತ್ತಿದೆ. ಹೊಸ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಅರ್ಥಗಳು ಸಿಕ್ಕಿ ಹೊಸ ಉಪಯೋಗಗಳು ಕಾಣಬರುತ್ತಿವೆ.

ಏನೇ ಆದರೂ ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳಿಗೆ ಏನೇನು ಹೊಸ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದೆಂಬುದು ಗಣಿತದ ತತ್‌ಕ್ಷಣದ ಅಥವಾ

ಪ್ರಾಮುಖ್ಯ ಗುರಿಯಾಗಿಲ್ಲ. ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದಲೂ, ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳಿಂದಲೂ ಹೊರಟು ಯಾವ ಯಾವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬುದು ಅದರ ಮುಖ್ಯ ಉದ್ದೇಶ. ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತ (Applied Mathematics) ವಾದರೋ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಭೌತಿಕ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕವಾಗುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಸಿಗುವುವೋ ಅಂತಹುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಸತ್ಯದಿಂದ ಬೇರ್ಪಟ್ಟು ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಗಣಿತವು ಕೇವಲ ಭಾವನಾ ರೂಪವಾಗಿ (abstract) ಬಿಟ್ಟಿದೆ. ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತವು ವಾದ್ಯಮೇಳ ಕೃತಿ (symphony) ಯಂತಾಗಿದೆ. ಬೀತೋವನ್ (Beethoven) ಐದನೆಯ ಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದನು. ಇದಕ್ಕೆ ಬೇರೆಬೇರೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕಾರರು ಆಸೆ, ನಿರಾಸೆ, ಜಯ, ಅಪಜಯ, ಅದೃಷ್ಟದ ವಿರುದ್ಧ ಮನುಷ್ಯನ ಹೋರಾಟ ಮುಂತಾದ ಬೇರೆಬೇರೆ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿದರು.

ಅತಿಯಾಗಿ ಭಾವನಾರೂಪವಾಗಿಬಿಟ್ಟಿರುವ ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದ ಲಕ್ಷಣದ ಕಾರಣ ಬರ್ಟ್‌ರ್ಯಂಡ್ ರಸಲ್ ಅವರು, "ನಮ್ಮ ಮಾತಿನ ಸತ್ಯಾಂಶದ ಅರ್ಥವನ್ನರಿಯದೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಿರುವ ವಿಷಯ" ಎಂಬುದಾಗಿ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ವಿವರಣೆ ಇತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ರಸಲ್ ಅವರ ವಿವರಣೆಯ ಗೂಢಾರ್ಥವನ್ನರಿಯದೆ ಗಣಿತದ ವಿರೋಧಿಗಳು ಅವರ ಮಾತನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು ಬಿಡುವುದೇನೋ ನಿಜ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ 'ಷಾ (Shaw) ಹೇಳಿದುದಕ್ಕೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡವರೆಲ್ಲ ಅವನನ್ನು ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳದಿರುವುದೇ ಕಾರಣ' ಎಂಬುದಾಗಿ ಜಿ.ಕೆ. ಚೆಸ್ಟರ್‌ಟನ್ (G.K. Chesterton) ಹೇಳಿದ ಮಾತು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲರ್ಹವಾಗಿದೆ.

ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಕಾರಣ 'ಗಣಿತದ ಸಾಧನೆ' ಮತ್ತು 'ಗಣಿತದ ಸತ್ಯ' ಎಂಬ ಗಣಿತದ ವಿಶಿಷ್ಟತೆಯ ಎರಡು ಹೊಸ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡಿವೆ. 'ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವೂ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟು ಪ್ರತಿ ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ' ಎಂಬ ಸಾಧಾರಣ ನಂಬಿಕೆಯು ಪೂರಾ ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲ. ಯಾವ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಾದರೂ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನೂ ವಿವರಿಸಿ, ಪ್ರತಿ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಷರತ್ತನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, ಚರ್ಚೆಯೇ ಅಸಾಧ್ಯ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಹಲವು ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳನ್ನೂ, ಹಲವು ಅಸಾಧಿತ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನೂ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲೇಬೇಕು. ಗಣಿತದ ಪ್ರತಿ ಶಾಖೆಯೂ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳೆಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯಲಾಗಿರುವ ಸಾಧನೆಗೆ ಒಳಗಾಗದಿರುವ ಹಲವು ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಂದಲೇ ಶುರುವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ವ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದದ ಹಲವು ಪದಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇಷ್ಟು ಮಾತ್ರ ನಿಜ: ಅದರಿಂದಾಚೆಗೆ ಬರುವ ಪದಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ನಾವು ಆ ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ (ಅವುಗಳಿಗೆ ಪ್ರಮೇಯಗಳೆಂದು ಹೆಸರು) ಆ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು.

ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಶಾಖೆಯಲ್ಲಿ q ಎಂಬ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯ ನಿಜ ಎಂದರೇನು ? ಆ ಶಾಖೆಯ ಮೊದಲಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡ p ಎಂಬ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ನಿಜವಾದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು qಯು pಯಿಂದ ತರ್ಕೀಯವಾಗಿ ಸಿಗುವುದಾದಲ್ಲಿ ಆಗ q ಎಂಬುದು ನಿಜ ಎಂದರ್ಥ. pಯು ಸತ್ಯವೋ, ಅಸತ್ಯವೋ, 'p ಕಾರಣದಿಂದ q ನಿಜ' ಎಂಬ ರೀತಿಯ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ರಾಶಿ ಶುದ್ಧ

ಗಣಿತ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರ್ಟ್‌ರ್ಯಾಂಡ್ ರಸಲ್ ವಿವರಣೆ ಇತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಸಂಪೂರ್ಣ ನಿಜಾಂಶ ಎಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಸಾಪೇಕ್ಷ ನಿಜಾಂಶ ಎಂಬ ಅತಿ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವಾದ ಅಭಿಪ್ರಾಯಕ್ಕೆ ಗಣಿತದ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದು ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದಿದೆ.

ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಗಳ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುವ ಪದಗಳು ಪೂರ್ವ ವಿವರಣೆ ಹೊಂದಿಲ್ಲದೆ ಅರ್ಥರಹಿತವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಆಧಾರಸೂತ್ರಗಳನ್ನೇ ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸುವ ಕಾರಣ, 'ಸತ್ಯ' ಎಂಬ ಪದವೇ ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ನಾವು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ನಾವು ಈ ರೀತಿ ವರ್ಣಿಸಬಹುದು: ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಚೀಟಿಗಳಿವೆ—ಒಂದು ರೀತಿಯವುಗಳಿಗೆಲ್ಲ 'ನಿ' (ಎಂದರ 'ನಿಜ') ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆಲ್ಲ 'ಸು' (ಎಂದರೆ 'ಸುಳ್ಳು') ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಕ್ಕೂ ನಾವು 'ನಿ' ಎಂಬ ಚೀಟಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸುತ್ತೇವೆ. ಗಣಿತದ 'ಪ್ರ' ಎಂಬ ಯಾವ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಾದರೂ ಅದು ತರ್ಕದ ರೀತ್ಯಾ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ (ಇವುಗಳನ್ನು ನಿಜ ಎಂಬುದಾಗಿ ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ) ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನರಿತು, ಆ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗೆ 'ನಿ' ಅಥವಾ 'ಸು' ಎಂಬ ಚೀಟಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸುತ್ತೇವೆ.

ತರ್ಕದ ರೀತ್ಯಾ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತಕ್ಕೂ, ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತಕ್ಕೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನಿಲ್ಲ. ಏನಾದರೂ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅದೇನೆಂದರೆ, ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ 'ಸತ್ಯ' ಎಂದರೆ ಅನುಭವಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸತ್ಯ (empirical truth) ಎಂದರ್ಥ. ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತದ ಅಸ್ಪಷ್ಟ ಪದಗಳಿಗೆ ಭೌತಿಕ ಅರ್ಥಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಈ

ಶಾಖೆಯ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ನಿಜ. ಈ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ತರ್ಕದ ರೀತ್ಯಾ ಬರುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳೂ ಕೂಡ ಅದೇ ಕಾರಣದಿಂದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ನಿಜ.

ಭೌತಿಕ ಪ್ರಪಂಚದ ರೀತಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಠಿಣವಾದುದರಿಂದ ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಅನುಭವಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ನಿಜ ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಸಂಭವ. ಹಾಗಾಗಿ ಪ್ರಮೇಯಗಳೂ ಕೂಡ ಅನುಭವಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹೇಗಾದರೂ ಇರಲಿ, ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಒಂದು ದತ್ತ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ನಿಜ ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಂಭವ ಬಹು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಶೇಕಡ 100 ಭಾಗ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಅನುಭವದಲ್ಲಿ ನಿಜ ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಭವವನ್ನು ಅವು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ವಿಚಿತ್ರ ಸತ್ಯಾಂಶದ ರೀತಿನೀತಿ ಈಗ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರಬಹುದು: (ಶುದ್ಧ) ಗಣಿತದ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವು ಯಾವ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದಾಗಿದೆಯೋ ಅವಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ನಿಜ—ಎಂದರೆ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ನಿಜವಾದಲ್ಲಿ ಅದು ನಿಜ. ಪರತ್ತಿಗನುಗುಣವಾದ ಈ ರೀತಿಯ ಸತ್ಯವು ಅನುಭವಾತ್ಮಕ ಅಂಶಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಏನೂ ಹೇಳುವುದಿಲ್ಲವೆಂದಂತಾಯಿತು; ಆದಕಾರಣ ಅನುಭವಸಿದ್ಧವಾಗಿ ಕಾಣಬರುವ ಅಂಶಗಳೊಡನೆ ಅದು ಯಾವ ವಿರೋಧಕ್ಕೂ ಸಿಕ್ಕಿಕೊಳ್ಳಲಾರದು (ಅನುಭವಾತ್ಮಕ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಮತ್ತು ತತ್ತ್ವಗಳು ಹೀಗಲ್ಲ) ಮತ್ತು ಹೊಸ ರುಜುವಾತಿನಿಂದಲೂ ಅದು ನಿರಾಕರಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ. (ಶುದ್ಧ) ಗಣಿತದ ಸತ್ಯವು ಅವಿರೋಧವಾಗಿ ನಿಜ ಏಕೆಂದರೆ

ಅದರಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅಂಶ ಸೇರಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್ ಹೇಳಿರುವಂತೆ "ಗಣಿತದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ನಿಜಪರಿಸ್ಥಿತಿಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಸತ್ಯವಲ್ಲ, ಮತ್ತು ಅವು ಸತ್ಯವಾಗಿರುವ ತನಕ ನಿಜ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ."

೨. ಅನಂತ (Infinity) ಎಂದರೇನು ?

"ಅನಂತ! ಮಾನವನ ಮನಸ್ಸನ್ನು ಅಷ್ಟೊಂದು ಚಕಿತಗೊಳಿಸಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮತ್ತೊಂದಿಲ್ಲ."

—ಡೇವಿಡ್ ಹಿಲ್‌ಬರ್ಟ್
(David Hilbert)

ಅನಾದಿ ಕಾಲದಿಂದಲೂ ಅನಂತ ಎನ್ನುವುದು ಸಾಧಾರಣ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯೂ, ವೇದಾಂತಿಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ತರ್ಕಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಒಂದು ರಹಸ್ಯವೂ ಆಗಿದೆ. ಇತ್ತೀಚಿನವರೆಗೆ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಅನಂತದ ರೀತಿಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅರಿಯದೆ ಅದನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಆದಕಾರಣ ಅವರ ಮುಂದೆ ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧಿಸುವ ಮತ್ತು ಅರ್ಥರಹಿತವಾದ ಒಂದು ರಾಶಿಯೇ ಬಂದು ಬಿದ್ದಿತು. ಬೇರೆಬೇರೆ ಮತಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅನಂತದ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಳಕೆ ಕಾಣಬರುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತದ ದರ್ಶನಜ್ಞರು ಅನಂತ ಎಂದರೇನು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಬಹು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಗತಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅನಂತ ಎನ್ನುವುದರ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಅವರು ಅದರ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾದ ಮತ್ತು ಸ್ಪಷ್ಟ

ವಾದ ತತ್ತ್ವವನ್ನೂ ಬೆಳಸಿದ್ದಾರೆ. ಅನಂತ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ 'ಅರ್ಥ'ವನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಮೊದಲನೆಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಎಂದರೆ ಜಾರ್ಜ್ ಕಾಂಟಾರ್ (George Cantour 1845-1918). ಕಾಂಟಾರ್‌ನನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಸಮುಚ್ಚಯ (sets)ಗಳ ವಿಚಾರ ಸರಣಿ (theory)ಯ ಜನಕ ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಸಮುಚ್ಚಯಗಳ ಅಭಿಪ್ರಾಯವಿಲ್ಲದೆ ಅನಂತದ ಸರಿಯಾದ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಹೊಂದಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರಣ ದಿಂದ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳ ಉದಯ ಆಗುವವರೆಗೂ ಶತಮಾನಗಳ ಕಾಲ ಅನಂತ ಎನ್ನುವುದರ ಕಟ್ಟುನಿಟ್ಟಾದ ಅಧ್ಯಯನ ತಡೆ ಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿತ್ತು. ಕಾಂಟಾರ್‌ನನ್ನು ಅನಂತದ ಗಣಿತತತ್ತ್ವದ ಜನಕ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಕರೆಯಬಹುದು. ಕಾಂಟಾರ್ ಜರ್ಮನಿಯ ಒಂದು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ಆಗಿದ್ದನು. ತನ್ನ 29ನೆಯ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಅವನು ಅನಂತದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ತನ್ನ ಮೊದಲನೆಯ ಲೇಖನವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದನು. 45ನೆಯ ವಯಸ್ಸಿಗೆ ಬರುವುದರೊಳಗಾಗಿಯೇ ತನ್ನ ಅನೇಕ ಪ್ರಮುಖ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಮುಗಿಸಿ ದ್ದನು. ಅದಾದ ಮೇಲೆ ನರಗಳ ಕುಸಿತ ಮತ್ತು ಉನ್ಮಾದಕ್ಕೆ ಸಿಕ್ಕಿ ನರಳಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದನು. ತನ್ನನ್ನು ಗಣಿತದ ಇಲಾಖೆ ಯಿಂದ ದರ್ಶನಶಾಸ್ತ್ರದ ಇಲಾಖೆಗೆ ವರ್ಗಮಾಡಲು ಕೋರಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಅರ್ಜಿಯನ್ನು ಕೂಡ ಬರೆದುಕೊಂಡಿದ್ದನು. ಕೊನೆಗೆ 1918ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹುಚ್ಚಾಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಅವನು ಮೃತನಾದನು.

ಒಂದು ಸಮುಚ್ಚಯದ ಅಭಿಪ್ರಾಯದಿಂದ ನಾವು ಪ್ರಾರಂಭಿಸು ತ್ತೇವೆ. ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಸಮುಚ್ಚಯ ಎಂದರೆ ಒಂದು

ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಕ್ಷಣವನ್ನುಳ್ಳ ವಸ್ತುಗಳ ರಾಶಿ. ಸಮುಚ್ಚಯದ ಪ್ರತಿ ವಸ್ತುವಿಗೂ 'ಘಟಕ' ಅಥವಾ 'ಅಂಶ' (member or element) ಎಂದು ಹೆಸರು. ನಂತರ ನಾವು ದತ್ತ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಉಪಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ವಿವರಣೆ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. S_1 ಮತ್ತು S_2 ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮುಚ್ಚಯಗಳ ಪೈಕಿ S_1ನಿನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ S_2ವಿನ ಅಂಶವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ S_1 ಎಂಬುದು S_2 ಎಂಬುದರ ಉಪಸಮುಚ್ಚಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. S_1 ಎಂಬುದು S_2ವಿನ ಉಪ ಸಮುಚ್ಚಯವೂ ಆಗಿ, S_2ವಿನ ಕಡೆಯ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಅಂಶ ವಾದರೂ S_1ನಿನ ಅಂಶವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆಗ S_1 ಎಂಬುದಕ್ಕೆ S_2ವಿನ ಸೂಕ್ತ ಉಪಸಮುಚ್ಚಯ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಎರಡು ಸಮುಚ್ಚಯ ಗಳ ಅಂಶಗಳೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳು ಸಮ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವಾದದ್ದು ಎಂದರೆ 'ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳು' (equivalent sets) ಎನ್ನುವುದರ ವಿವರಣೆ. ಎರಡು ಸಮುಚ್ಚಯಗಳ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಒಂದು-ಒಂದು ಎನ್ನುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ— ಎಂದರೆ ಒಂದು ಸಮುಚ್ಚಯದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶದೊಡನೆ ಇನ್ನೊಂದರ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು ಜೋಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ—ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ: ಮನುಷ್ಯನ ಕೈಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಕಿವಿಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ. ಇದನ್ನು ಸರಿನೋಡಲು ಎಡಗೈಯ್ಯನ್ನು ಎಡಕಿವಿಯ ಮೇಲೂ, ಬಲಗೈಯ್ಯನ್ನು ಬಲಕಿವಿಯ ಮೇಲೂ ಇಟ್ಟು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಎಡಗೈಯಿನ ಬೆರಳು ಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಮತ್ತು ಬಲಗೈಯಿನ ಬೆರಳುಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ

ಸಮಾನಾರ್ಥಕ. ದತ್ತ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಮತ್ತೊಂದು ಜೋಡಿಯೊಡನೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ. ಒಂದು ತ್ರಯ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ.

ಸಮುಚ್ಚಯದ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಲಕ್ಷಣವು ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುತ್ತದೆ:

(೧) ಲಕ್ಷಣವು ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ (reflexive)—ಎಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಸಮುಚ್ಚಯವೂ ತನ್ನೊಡನೆಯೇ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ; (೨) ಲಕ್ಷಣವು ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ (symmetrical)—ಎಂದರೆ Aಯು Bಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿದ್ದರೆ Bಯು Aಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ; (೩) ಲಕ್ಷಣವು ಸಂಕ್ರಮವನ್ನು ಉಳ್ಳದು (transitive)—ಎಂದರೆ Aಯು Bಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿದ್ದು, Bಯು Cಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ Aಯು Cಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ.

ಹೀಗಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳೂ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ, ಮತ್ತು ಈ ಲಕ್ಷಣವು ಪ್ರತಿ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. Aಯೆಂಬ ದತ್ತ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರೆ Aಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾದ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳೆಲ್ಲದರ ಸಮುಚ್ಚಯವೆನ್ನಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ ವಿವರಿಸಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಮೂಲಾಂಕ (cardinal member) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಆದ ಕಾರಣ ಪ್ರತಿ ಸಮುಚ್ಚಯವೂ ಒಂದು ಮೂಲಾಂಕವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಎಲ್ಲ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳೂ ಅದೇ ಮೂಲಾಂಕವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಒಂಟಿ (singleton)ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೂಲಾಂಕಕ್ಕೆ 1

ಎಂದು ಹೆಸರು. ಜೋಡಿ (couple)ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೂಲಾಂಕಕ್ಕೆ 2 ಎಂದು ಹೆಸರು. ಮುಕ್ಕೂಟ (triplet)ವು 3ನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ; ಇತ್ಯಾದಿ. ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು 1,2,3,4,5,—ಎಂಬ ಮೂಲಾಂಕಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಖಾಲಿ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದು ಸೊನ್ನೆ (0 ಎಂಬ ಮಾಮೂಲಿ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು) ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಈಗ ನಾವು ಮೂಲಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದಂತೆ 'ಗಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ' ಮತ್ತು 'ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ' ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. C_1 ಮತ್ತು C_2 ಎಂಬ ಮೂಲಾಂಕಗಳನ್ನುಳ್ಳ S_1 ಮತ್ತು S_2 ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮುಚ್ಚಯಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಆಗ S_1 ಎಂಬುದು S_2ಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿರದೆ ಇದ್ದು, S_1ನ ಒಂದು ಉಪಸಮುಚ್ಚಯ S_2ಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು C_1 ಎಂಬುದು C_2ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ (ಚಿಹ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ : $C_1 > C_2$).

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : $2 > 1$, ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಜೋಡಿಯು ಒಂದು ಒಂಟಿಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಲ್ಲ; ಆದರೆ ಜೋಡಿಯ ಪೈಕಿ ಒಂದು ದತ್ತ ಒಂಟಿಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ.

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ವಾರಸ್ಯ ಅಂಶ ಏನೆಂದರೆ: ನಮ್ಮ ವಿವರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೂ 'ಎಣಿಸುವುದು' ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತಂದಿಲ್ಲ. ಮುಖ್ಯವಾದ ವಿಷಯ ಏನೆಂದರೆ 'ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧ' ಎನ್ನುವುದು. ಎಣಿಸುವುದು ಎನ್ನುವ ವಿಷಯ ಕೇವಲ ಅನಗತ್ಯ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಅನಂತದ ಸರಿಯಾದ ತತ್ತ್ವಕ್ಕೆ ನಮ್ಮನ್ನು ಒಯ್ಯುವುದೂ

ಇಲ್ಲ. ಪರಸ್ಪರ ಒಂದು-ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಬಂಧ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಗೆ ಹಿಡಿಸುವುದಲ್ಲದೆ ಎಣಿಸುವುದನ್ನರಿಯದ ಅವಿದ್ಯಾವಂತನೂ ಅದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಈ ಸಭಾಂಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಕುರ್ಚಿಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯವನ್ನೂ, ಸಭಿಕರ ಸಮುಚ್ಚಯವನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಯಾವುದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಎಣಿಸದೆ ಅರಿಯುವುದು ಸುಲಭ. ಕುರ್ಚಿಗಳೆಲ್ಲ ಭರ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು ಹಲವು-ಸಭಿಕರು ನಿಂತಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕುರ್ಚಿಗಳಿಗಿಂತ ಸಭಿಕರು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದಾರೆ ಎಂದರ್ಥ (ಇಲ್ಲಿ ಸಭಿಕರ ಒಂದು ಸಮುಚ್ಚಯವು, ಎಂದರೆ ಕುರ್ಚಿಗಳ ಮೇಲೆ ಕುಳಿತಿರುವವರು ಕುರ್ಚಿಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ). ಸಭಿಕರೆಲ್ಲರೂ ಕುಳಿತಿದ್ದು, ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಖಾಲಿ ಕುರ್ಚಿಗಳು ಉಳಿದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಸಭಿಕರಿಗಿಂತ ಕುರ್ಚಿಗಳೇ ಹೆಚ್ಚೆಂದು ಅರ್ಥವಾಗುವುದು. (ಇಲ್ಲಿ ಕುರ್ಚಿಗಳ ಒಂದು ಉಪಸಮುಚ್ಚಯ ಎಂದರೆ ಭರ್ತಿಯಾಗಿರುವುವು, ಸಭಿಕರ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ).

ಋಣಸಂಖ್ಯೆ (negative numbers) ಗಳು, ಪರಿಮೇಯ (rational) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ (irrational) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವನ್ನು ಬೆಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕಟ್ಟುನಿಟ್ಟಾದ ವಿವರಣೆಗಳಿಗೆ ನಾನೀಗ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, p/q ಎಂಬ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ ಕೂಡ ಭೇದ 1ನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು p/q ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ (q ಮತ್ತು

p ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ-ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\sqrt{2}$, π, e. ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೇರಿ ವಾಸ್ತವಿಕ (real) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯವು ಸಮಾನಾರ್ಥಕ. ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ "ಅಂಕಗಣಿತ ಧಾರೆ" (arithmetic continuum) ಎಂದೂ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ "ರೇಖಾಗಣಿತ ಧಾರೆ" (Geometric Continuum) ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ, ಎಂದರೆ ಅನಂತದ ವಿವರಣೆಗೆ, ಬರುತ್ತೇವೆ. S ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಮುಚ್ಚಯದಿಂದ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು ತೆಗೆದುಬಿಟ್ಟಾಗ ಉಳಿಯುವ ಸಮುಚ್ಚಯ S′ ಆಗಿರಲಿ. S′ ಎಂಬುದು Sಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, Sಗೆ ಪರಿಮಿತ (finite) ಸಮುಚ್ಚಯ ಎಂದು ಹೆಸರು, ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ S′ನ ಮೂಲಾಂಕ Sನ ಮೂಲಾಂಕಕ್ಕಿಂತ 1 ಕಡಿಮೆ. ಪರಿಮಿತ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಮೂಲಾಂಕಕ್ಕೆ ಪರಿಮಿತ ಮೂಲಾಂಕ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಹಾಗಲ್ಲದೆ S′ ಎಂಬುದು Sಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಿದ್ದರೆ, S ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು Sನ ಮೂಲಾಂಕವು ಅನಂತ ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. ಇಲ್ಲಿ S ಮತ್ತು S′ ಎರಡೂ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾದ ಕಾರಣ ಅವೆರಡರ ಮೂಲಾಂಕಗಳೂ ಏಕರೀತಿಯಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕುವುದರ ಮೂಲಕ

ಪರಿಮಿತ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಮೂಲಾಂಕವು 1 ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು ತೆಗೆದುಬಿಟ್ಟರೂ ಕೂಡ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಮೂಲಾಂಕವು ಪರಿವರ್ತನೆ ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯದಿಂದ 1, 2, 3, ...n ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ ಅದರ ಮೂಲಾಂಕ ಬದಲಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ವೇದ್ಯ.

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯಬರುವುದೇನೆಂದರೆ : ಪ್ರತಿ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೂ ತನಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾದ ಒಂದು ಉಪಸಮುಚ್ಚಯವಿದ್ದೇ ಇದೆ ಎಂಬುದು ; ಹೀಗಾಗಿ ಈ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೂ, ಅದರ ಉಪಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೂ ಒಂದು ಮೂಲಾಂಕವಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಪರಿಮಿತ ರಾಶಿಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವ 'ಪೂರ್ಣವು ತನ್ನ ಭಾಗಾಂಶಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು' ಎಂಬ ಪ್ರಮುಖ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅನಂತದ ತತ್ತ್ವದಲ್ಲಿ ಕೈಬಿಡಬೇಕಾಗುವುದು.

ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯದ ನಿದರ್ಶನವನ್ನು ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವೆ ? ವಾಸ್ತವಿಕ ಜೀವನದಿಂದ ಅಂತಹ ನಿದರ್ಶನವನ್ನು ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ವಾಸ್ತವಿಕ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುವ ಎಲ್ಲ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳೂ, ಅವು ಎಷ್ಟೇ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಲಿ, ಪರಿಮಿತ. ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಅತ್ಯಂತ ಭಾರಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರೆ ಎಡ್ಡಿಂಗ್‌ಟನ್ (Eddington) ಪ್ರಕಾರ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರೋಟಾನ್ (protons)ಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 10^{80}. ಆದರೆ ಇದು ಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆ. $10^{10^{10}}$ ಎಂಬುದೂ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದಾದರೂ ಪರಿಮಿತ. ನಾವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಹೊರಟರೆ ಸಾಧಾರಣ ಸೈಜಿನ 50,000 ಪುಸ್ತಕಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.

ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಮಗೆ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಈಗ ಧನ(positive) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

1,2,3, ..., n .... ; ನಾವು 1 ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಿಟ್ಟರೆ ನಮಗೆ

2,3,4, ..., n–1, ... ಎಂಬ ಉಪಸಮುಚ್ಚಯ ಸಿಗುವುದು. ಇವೆರಡು ಸಮುಚ್ಚಯಗಳಿಗೂ ನಾವು ಒಂದು-ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹೀಗಾಗಿ ಇವೆರಡೂ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ. ಆದಕಾರಣ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಅನಂತ.

ಎಷ್ಟು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿವೆಯೋ ಅಷ್ಟೇ ಧನ ಸಮ (even) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ [ಅಷ್ಟೇ ಧನ ಬೆಸ (odd) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ] ಇವೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಮುಚ್ಚಯಗಳಿಗೂ ಒಂದು—ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ನಾವು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು.

1	2	3	...	n	...
$\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Uparrow$		$\Uparrow$	
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$		$\Downarrow$	
2	4	6	...	$2n$	...

ಇದು ನಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು; ಆದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಅಸಮಂಜಸತೆಯೇನೂ ಇಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯವು ಅದರ ಒಂದು ಉಪಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ.

ಒಂದು ಹೋಟೆಲಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಸಿಗಳು ಇಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಅನಂತ ಕೊಠಡಿಗಳಿವೆಯೆಂತಲೂ, ಒಂದು ದಿನ ಹೋಟೆಲು ಭರ್ತಿಯಾಗಿರುವುದೆಂತಲೂ ಭಾವಿಸಿ. ಇದ್ದಕ್ಕಿದ್ದಂತೆಯೇ ಹೋಟೆಲಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಅನಂತ ಪ್ರವಾಸಿಗಳು ಬಂದರೆನ್ನಿ. ಎಲ್ಲ ಕೊಠಡಿಗಳೂ ಮೊದಲೇ ಭರ್ತಿಯಾಗಿದ್ದಾಗ್ಗೂ ಈ ಹೊಸ ಪ್ರವಾಸಿಗಳಿಗೂ ನಾವು ಜಾಗ ಒದಗಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಮಾಡಬೇಕಾದುದೇನೆಂದರೆ: 1ನೆಯ ನಂಬರಿನ ಕೊಟ್ಟಡಿಯವನನ್ನು 2ನೆಯ ನಂಬರಿಗೂ, 2ನೆಯ ನಂಬರವನನ್ನು 4ಕ್ಕೂ, 3ನೆಯುವನನ್ನು 6ಕ್ಕೂ, ಇತ್ಯಾದಿ ಬದಲಾಯಿಸುವುದು. ಹೀಗಾಗಿ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೊಟ್ಟಡಿಗಳೆಲ್ಲ ಖಾಲಿಯಾಗಿ ಹೊಸದಾಗಿ ಬಂದ ಪ್ರವಾಸಿಗಳಿಗೆ ಸ್ಥಳ ಕೊಡಲು ಅವಕಾಶವಾಗುತ್ತದೆ.

ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾದ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳಿಗೆ 'ನಿರ್ದೇಶಿತ' (enumerable) ಎಂದು ಹೆಸರು; ಏಕೆಂದರೆ ಅಂತಹ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒಂದು ಅನಂತ ಶ್ರೇಣಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದ ಅಥವಾ ಅಂಶವನ್ನೂ

1ನೆಯ, 2ನೆಯ,3ನೆಯ, ..., n ನೆಯ, ... ಎಂದು ನಿರ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು 'ಅನಂತ ಮೆರೆವಣಿಗೆ' ಎನ್ನಬಹುದು.

ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯವು ನಿರ್ದೇಶಿತ ಎಂಬುದು ಕಾಂಟಾರ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಹಲವು ಸ್ವಾರಸ್ಯ ಅನ್ವೇಷಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳೆಲ್ಲ ನಿರ್ದೇಶಿತವೆಂದೂ, ಆದ ಕಾರಣ ಅವುಗಳ ಮೂಲಾಂಕಗಳೆಲ್ಲ (∞ ಎಂಬ) ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ ನೀವು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಅದು ಹಾಗಲ್ಲವೆಂಬ

ತಲ್ಲಣಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಅಂಶವನ್ನು ಕಾಂಟಾರ್ ಪತ್ತೆ ಮಾಡಿದನು. ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಅನಿರ್ದೇಶಿಕ ಎಂದೂ ಅವನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದನು – ಎಂದರೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಅನಂತ ಮೆರೆವಣಿಗೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾರೆವು. ಅನಂತ ಶ್ರೇಣಿ (ಅಥವಾ ಮೆರೆವಣಿಗೆ)ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ನೀವು ಹೇಗೇ ಪ್ರಯತ್ನ ಪಟ್ಟರೂ ಆ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಜಾಗ ಸಿಗದ ಹಲವು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಉಳಿದುಹೋಗುತ್ತವೆ. ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು; ಕಾರಣ ಅವೆರಡರ ಮೂಲಾಂಕಗಳೂ ಒಂದೇ (ಅದನ್ನು Cಅನ್ನೋಣ). ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯದ ಉಪಸಮುಚ್ಚಯವಾದ ಕಾರಣ $C > \infty$.

ಇದರಿಂದ ನಿರ್ಣಯವೇನೆಂದರೆ : ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಇವೆರಡು ಅನಂತವಾದರೂ, ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕಿಂತ ಭಾರಿಯಾದದ್ದು. ಆದಕಾರಣ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾರ್ಥಕವಾಗಬೇಕಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅನಂತವು ಇನ್ನೊಂದು ಅನಂತಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬಹುದು. ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳೂ ಕೂಡ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪಂಗಡಗಳಾಗಿರಬಹುದು.

ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಅನಂತಪಾಲು ಹೆಚ್ಚಾಗಿವೆ. ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ

ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶೇಕಡ 100 ಭಾಗದಷ್ಟು ಹತ್ತಿರವಾಗಿ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದು, ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶೇಕಡಾ ಭಾಗ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಎನ್ನುವಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದು. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಸ್ವಾರಸ್ಯ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ.

ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿ ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಕುಳಿತ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳೆಂತ ಭಾವಿಸಿ. ಪರೀಕ್ಷಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಹೊರಬಿದ್ದಾಗ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ ತೇರ್ಗಡೆ ಹೊಂದಿ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ ಅಸಫಲವಾದುವು. ಹಲವು ರಾಜಕಾರಿಣಿಗಳು, ಪತ್ರಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಅನೇಕ ಸಾರ್ವಜನಿಕರಿಂದ ಬೆಂಬಲ ಹೊಂದಿ 'ಅಪರಿಮೇಯ' ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೆಲ್ಲ ಹಾಹಾಕಾರ ನಡೆಸುತ್ತವೆ. ಫೇಲಾದವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತ ಎಂಬುದಾಗಿ ಅವು ಪ್ರತಿಭಟಿಸುತ್ತವೆ. ಉತ್ತೀರ್ಣರಾದ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅನಂತ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೋರಿಸಲು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದ ಫೇಲಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಮಾಧಾನ ಹೊಂದದೆ ಅನುತ್ತೀರ್ಣ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಶೇಕಡ 100 ಎಂಬ ವಾದವನ್ನು ಮುಂದಿಡುತ್ತಾರೆ.

ಅನುತ್ತೀರ್ಣ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮಗಾದ ಅನ್ಯಾಯಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಕುಲಪತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಲು ಒಂದು ಮೆರವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹೋಗಲು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಅವರಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ನಿರಾಸೆ ಕಾದಿರುತ್ತದೆ. ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ಅವರು (ಅನಿರ್ದೇಶಿತ ಸಮುಚ್ಚಯವಾದ ಕಾರಣ) ಮೆರವಣಿಗೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.

ಮುಂದಿನ ವರುಷ ಡಿಗ್ರಿ ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಇದಕ್ಕೆ

ವಿರೋಧವಾಗಿ ಆಯಿತೆಂತ ಭಾವಿಸಿ—ಎಂದರೆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಫೇಲು ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪಾಸು. ಈ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾದವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಶೇಕಡ 100. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲೂ ಸಾರ್ವಜನಿಕರಲ್ಲೂ ಆನಂದೋತ್ಸವ —ಆದರೆ ಹಲವು ವಿದ್ಯಾಪಂಡಿತರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ತನ್ನ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿಬಿಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ವ್ಯಸನಪಡಬಹುದು.

ಆದರೆ ಪಾಸಾದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಸಂತೋಷವು ಕ್ಷಣಿಕವಾದುದೆಂದು ಕೂಡಲೇ ಅರಿಯುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ತಮ್ಮ ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಘಟಿಕೋತ್ಸವದಲ್ಲಿ ಹಾಜರಿದ್ದಾಗಲೀ, ಗೈರು ಹಾಜರಿಯಲ್ಲಾಗಲೀ ಪಡೆಯಬೇಕು. ಹಾಜರಿದ್ದು ಡಿಗ್ರಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲಿಷ್ಟಪಡುವವರು ಸಂಪ್ರದಾಯದ ಉಡುಪನ್ನು ಧರಿಸಿ ಸಂಪ್ರದಾಯದ ಮೆರವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅನಿರ್ದೇಶಿತ ಸಮುಚ್ಚಯವಾದ ಕಾರಣ ಅವರೆಲ್ಲ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಮೆರವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಿಜವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಶೇಕಡ ಸೊನ್ನೆ ಎನ್ನಬಹುದು. ಆದಕಾರಣ ಘಟಿಕೋತ್ಸವದಲ್ಲಿ ಹಾಜರಿದ್ದು ತಮ್ಮ ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗಳು ಶೇಕಡಾವಾರು ನೋಡಿದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವೇ ಇಲ್ಲವೆನ್ನಬಹುದು.

ಪಾಸಾದವರ ಪೈಕಿ ಗೈರುಹಾಜರಿಯಲ್ಲಿ ಡಿಗ್ರಿ ಪಡೆಯಲು ಅರ್ಜಿ ಹಾಕಿದವರ ವಿಷಯವೇನು ? ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಆಫೀಸು ಅವರ ಅರ್ಜಿಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ, ಎಂದರೆ ಒಂದು ಬರವಣಿಗೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸಬೇಕು. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವೇನೆಂದರೆ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಆಫೀಸಿನಿಂದ ಗೈರುಹಾಜರಿಯಲ್ಲಿ ಡಿಗ್ರಿ ಪಡೆಯುವವರ ಶೇಕಡಾವಾರು ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಸರಿ.

ಇದೆಲ್ಲ ಕಾರಣದಿಂದ ಶೇಕಡ 100 ಭಾಗ ಪಾಸಾದಾಗ್ಯೂ, ತಮ್ಮ ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅವಕಾಶವಿರುವವರ (ಹಾಜರಾಗಿ ಅಥವಾ ಗೈರುಹಾಜರಿಯಲ್ಲಿ) ಶೇಕಡಾಭಾಗ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಸೊನ್ನೆ. ಆದಕಾರಣ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾದವರ ಪೈಕಿ ಸುಮಾರಾಗಿ ಶೇಕಡ 100 ಭಾಗ ಜನರೇ ಡಿಗ್ರಿ ಸರ್ಟಿಫಿಕೇಟುಗಳಿಲ್ಲದೆ ಹೋಗ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಅವರಿಗೆ ನೌಕರಿಗಳೂ ಸಿಗುವು ದಿಲ್ಲ.

ಕಾಂಟೊರ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಮತ್ತು ಇತರರನ್ನು ಚಕಿತಗೊಳಿ ಸಿದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯ ಹೀಗಿದೆ: ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಖಂಡ (ಅಥವಾ ಭಾಗ)ದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲದರ ಸಮುಚ್ಚಯ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟೇ ಪರಿಮಾಣಗಳ ವಿಶ್ವವಾಗಲಿ ಅದರ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ—ಇವೆರಡು ಸಮುಚ್ಚಯಗಳ ಮೂಲಾಂಕಗಳೂ ಒಂದೇ. ಇದರಿಂದೇನಾಯಿತೆಂದರೆ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಖಂಡದ ಮೇಲೆ ಇಡೀ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿರುವಷ್ಟೇ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಇದು ನಮ್ಮ ಸಾಧಾರಣ ಯೋಚನಾಶಕ್ತಿಗೆ ಗಾಬರಿಗೊಳಿಸುವಂತಿರಬಹುದು, ಆದರೆ ಇಂತಹ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಾರಣ ಯೋಚನಾಶಕ್ತಿ ಅಷ್ಟೇನೂ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಕವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನಂತದ ತತ್ತ್ವದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೈಬಿಟ್ಟ—ಪೂರ್ಣವು, ಅದರ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಎಂಬ—ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಈಗ ಮತ್ತೆ ಬರೋಣ. ಬರ್ಟ್ರ್ಯಾಂಡ್ ರಸಲ್ ಪ್ರಕಾರ 'ಗಣಿತ ದಲ್ಲಿ ಇದು ನಿರುಪಯೋಗ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ನಿಜವಾಗಿಯೂ ವಿನಾಶ ಕಾರಕ.' ಈ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಲ್ಲಿ ನಮಗಿರುವ ವಿಶ್ವಾಸ ಕೇವಲ ಮೂಢನಂಬಿಕೆ ಅಷ್ಟೆ. ಪರಿಮಿತದ ತತ್ತ್ವಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ನಿಜವಾದ ಕಾರಣ, ಅನಂತರ ತತ್ತ್ವದಲ್ಲೂ ಕೂಡ ಅದು ನಿಜವೆಂಬುದಾಗಿ

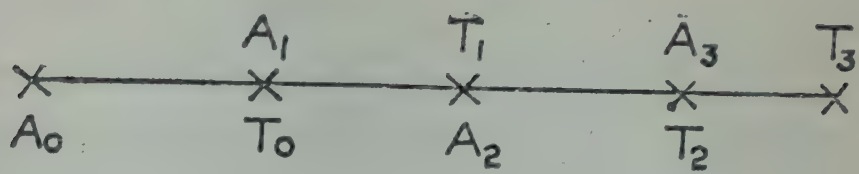
(ನಮಗೆ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದರೂ) ನಂಬುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು ತಿರಸ್ಕರಿಸುವುದು ನಮ್ಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಗೆ ಕಳವಳಕಾರಿಯಾಗಿ ಕಂಡರೂ ಅದನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಆಗುವ ಪರಿಣಾಮಗಳು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಳವಳಕ್ಕೆ ದಾರಿಮಾಡಿಕೊಡುತ್ತವೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಆ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಒಪ್ಪಿದ್ದೇ ಆದರೆ, ಎಲ್ಲ ರೀತಿಯ ಸ್ಪರ್ಧೆಗಳು, ಎಲ್ಲ ರೀತಿಯ ಅಂಗಸಾಧನೆಯ ಪೈಪೋಟಿಗಳು ಮತ್ತಿತರ ಎಲ್ಲ ತರಹದ ಕ್ರೀಡೆಗಳು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲದಂತಾಗುತ್ತವೆ. ಪೋಲೀಸಿನವ ಎಷ್ಟೇ ಜೋರಾಗಿ ಓಡಲಿ ಅವನು ಯಾವ ಕಳ್ಳನನ್ನೂ ಹಿಡಿಯಲಾರ.

ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಅಸಂಗತೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ ಸ್ವಯಂವಿರೋಧೋಕ್ತಿ (Paradox) ಯನ್ನು ಸುಮಾರು 2000 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಸೀನೋ (Zeno) ಎಂಬಾತನು ಒಂದು ಸವಾಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದನು. ಸೀನೋ ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದವನಾಗಿದ್ದು ಅನುಮಾನ ಪ್ರಕೃತಿಯವ ಎಂಬುದಾಗಿ ಖ್ಯಾತನಾಗಿದ್ದಾನೆ. 'ಅಕಿಲೀಸ್* (Achilles) ಮತ್ತು ಆಮೆ' ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಅಸಂಗತೋಕ್ತಿ ಇದು. ಆಮೆಯು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೊಂಚ ಮುಂದೆ ಇದೆ. ಅಕಿಲೀಸ್ ಜೋರಾಗಿ ಓಡುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ಆಮೆ ನಿಧಾನವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೂ ಅಕಿಲೀಸ್ ಎಂದಿಗೂ ಆಮೆಯನ್ನು ಹಿಡಿಯಲಾರ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೀನೋ ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ.

---

* ಈತನು ಗ್ರೀಕ್ ಪುರಾಣಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಒಬ್ಬ ಮಹಾ ಶೂರ.

ವಾದ ಹೀಗಿದೆ :



'ಅಕಿಲೀಸ್ ಆಮೆಯನ್ನು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ಆಮೆಯು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿತ್ತೋ ಅಲ್ಲಿಗೆ ಅವನು ಮೊದಲು ಹೋಗ ಬೇಕು. ಆದರೆ ಈ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆಮೆಯು ಕೊಂಚ ದೂರ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೊರಟುಹೋಗಿರುವ ಕಾರಣ, ಆಮೆಯು ಯಾವಾ ಗಲೂ ಅಕಿಲೀಸ್‌ಗಿಂತ ಮುಂದಾಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.'

ಈ ವಾದವನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಅನಂತ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳ ಒಂದು—ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ವಿಷಯವೆನ್ನುವುದು ಅರ್ಥವಾಗುವುದು. ಅಕಿಲೀಸ್ ಆಮೆ ಯನ್ನು ಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಆಗ ಆಮೆಯು ಹೋದ ದೂರ ಅಕಿಲೀಸಿನ ದೂರದ ಒಂದು ಭಾಗವೆಂದಾಯಿತು. ಆದರೆ ಇಬ್ಬರೂ ಯಾವ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ದಾರಿಯ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುತ್ತಾರಾದ ಕಾರಣ ಅಕಿಲೀಸಿನ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಆಮೆಯ ಸ್ಥಾನ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಒಂದು —ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪ್ರತಿ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿಯೂ ಕಲ್ಪಿಸಿ ದ್ದಾಯಿತು. ಯಾವ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಆಮೆಯು ಅಕಿಲೀಸಿ ನಷ್ಟೇ ಜಾಗಗಳನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದಾಯಿತು. ಆದಕಾರಣ ಆಮೆಯ ಪಥವು ಅಕೀಲೀಸಿನ ಪಥದ ಭಾಗವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯ ವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೀನೋ ವಾದಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಅನಂತವಾದುದು ತನ್ನ ಒಂದು ಭಾಗದೊಡನೆ ಒಂದು-ಒಂದು

ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಟ್ಟರೆ ಈ ಅಸಂಗತೋಕ್ತಿಯು ಅರ್ಥವಾಗುವುದು.

ಸೀನೋವಿನ ಅಸಂಗತೋಕ್ತಿಗೆ ವಿಲೋಮವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಎಂದರೆ ಬರ್ಟ್ರ್ಯಾಂಡ್ ರಸಲಿನ ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್ ಷ್ಯಾಂಡಿ (Tristrum Shandy)ಯ ಅಸಂಗತೋಕ್ತಿ. ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್ ಷ್ಯಾಂಡಿಯು ತನ್ನ ಚರಿತ್ರೆಯ ಮೊದಲನೆಯ ದಿವಸವನ್ನು ಬರೆದು ಮುಗಿಸಲು ಒಂದು ವರ್ಷ ತೆಗೆದುಕೊಂಡನು; ಆದಕಾರಣ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಬರೆಯುವ ವೇಗಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ವಿಷಯ ಸಂಗ್ರಹವಾಗುವುದರಿಂದ ತನ್ನ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ತಾನು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ದುಃಖಿಸಿದನು. ಬರ್ಟ್ರ್ಯಾಂಡ್ ರಸಲ್ ತನ್ನ ಅಸಂಗತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ತಿಳಿಸುತ್ತಾನೆ: ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್ ಷ್ಯಾಂಡಿಯು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ದಿನ ಸಾಯುವವನಾಗಿದ್ದರೆ ಅವನು ಆತ್ಮಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಮುಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಆದರೆ ಅವನು ಅಮರನಾದರೆ ಮುಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್ ಷ್ಯಾಂಡಿಯ ವಿರೋಧೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕಂಡ ವಾದಗಳಿಂದ ವಿವರಿಸಬಹುದು :

೧. ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್ ಷ್ಯಾಂಡಿಯು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಒಂದು ದಿವಸದ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾನೆ.

೨. ಅವನು ಅಮರನಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅವನ ದಿವಸಗಳು ಮತ್ತು ವರ್ಷಗಳು ಅನಂತ.

೩. nನೆಯ ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ದಿನದ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಅವನು nನೆಯ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಾನೆ.

೪. ಆದಕಾರಣ ಗೊತ್ತಾದ ಯಾವ ಒಂದು ದಿವಸದ ಚರಿತ್ರೆಯೂ ಬರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

೫. ಹೀಗಾಗಿ ಅವನ ಆತ್ಮಚರಿತ್ರೆಯ ಯಾವ ಭಾಗವೂ ಬರೆಯಲ್ಪಡದೇ ಹೋಗಲಾರದು.

೬. ಸಂಗತಿಗಳು ಆಗುವ ವೇಳೆಗಳಿಗೂ, ಬರೆಯುವ ವೇಳೆಗಳಿಗೂ ಒಂದು-ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದು, ಮೊದಲನೆಯದು ಎರಡನೆಯದರ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಪೂರ್ಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಭಾಗಾಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಪದ (terms)ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಏಕರೀತಿಯಾಗಿದೆ.

ಹೀಗಾಗಿ ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್ ಷ್ಯಾಂಡಿ ಅಮರನಾದಲ್ಲಿ ಅವನು ತನ್ನ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಮರ್ಥನಾಗುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು ವ್ಯಸನಪಡಬೇಕಾದ ಕಾರಣವಿಲ್ಲ.

ಈ ಮಧ್ಯೆ ನೀವು ಅನಂತವೆಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯವು ಹೇಗೆ ನಿರಾಶಾವಾದವನ್ನು ಆಶಾವಾದವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಟ್ರಿಸ್ಟ್ರಮ್ ಷ್ಯಾಂಡಿಯ ಅಸಂಗತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆಗುವ ನಿರಾಶಾವಾದವೆಂದರೆ ಯಾವ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಬರೆಯಬೇಕಾದ ವಿಷಯಗಳು ಬೆಳೆದುಕೊಂಡುಬಿಟ್ಟಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು. ಆಶಾವಾದದ ದೃಷ್ಟಿ ಏನೆಂದರೆ ಯಾವ ದಿವಸದವರೆಗಾದರೂ ಆಗಿರುವ ಸಂಗತಿಗಳು ಭವಿಷ್ಯದ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಾಲದೊಳಗಾಗಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು. ಅರ್ಧ ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ಲೋಟವಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ನೋಡಿ ಲೋಟವು ಖಾಲಿ ಇದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಿರಾಶಾವಾದಿಯು ದುಃಖಿಸುತ್ತಾನೆ; ಆದರೆ ಆಶಾವಾದಿಯು ಅದು ಅರ್ಧ ತುಂಬಿದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಹರ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ನಾವು ಆಶಾವಾದಿಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಪ್ರಗತಿ ಸಾಧ್ಯ.

ಅನಂತದ ತತ್ತ್ವವು ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು

ಹೊಂದಿದೆ; ಆದರೆ ನಾನೀಗ ಅವುಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲು ಹೊರಡುವುದಿಲ್ಲ. ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಿಗೆ ಅನಂತದಲ್ಲಿ ನೇರವಾದ ಆಸಕ್ತಿ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಅವರಿಗೆ ಅನಂತ ಪದಾರ್ಥಗಳ, ಕಾಲಗಳ ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನುಭವವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಅನಂತ ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನುಳ್ಳ ಗಣಿತದ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲ, ಅನಂತದ ಬಳಕೆಯಿಂದ ಅವರ ಕಾರ್ಯ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

ಇಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೂಡಿದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ 300,131 ಅಂಕಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಅನೇಕ ಪುಟಗಳೇ ಬೇಕಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 1. ಹತ್ತು ಲಕ್ಷ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ 1, ಮತ್ತು ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಕಾರ್ಯ ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಅನಂತವು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಅಥವಾ ಪ್ರಬಲವಾದ ಅಭಿಪ್ರಾಯ. ಹರ್ಮನ್ ವೀಲ್ (Hermann Weyl) ಹೇಳಿರುವಂತೆ 'ಗಣಿತವು ಅನಂತದ ವಿಜ್ಞಾನ (ಅಥವಾ ಶಾಸ್ತ್ರ).'

೩. ಗಣಿತದ ರೀತ್ಯಾ ಪರ್ಯಾಲೋಚನೆ

'ಜನರು ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಸೊಗಸಾದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸಾಕಷ್ಟು ಅರಿತಿಲ್ಲವೆಂಬ ಅಂಶವೊಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಅದರ ನ್ಯೂನತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಾನು ಹೇಳುವುದು ಏನೂ ಇಲ್ಲ. ಬೌದ್ಧಿಕ ಶಕ್ತಿಯ ಅನೇಕ ಲೋಪದೋಷಗಳನ್ನು ಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ಅವರು ನಿವಾರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಬುದ್ಧಿಯು ಮಂಕಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಹರಿತಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು; ಅದು ಅಲೆಯುವಂತಹುದಾಗಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಕಡೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸಿ ನಿಲ್ಲಿಸಬಹುದು; ಮತ್ತು ಇಂದ್ರಿಯ ಸುಖಗಳಲ್ಲಿ ಮಗ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಂದ ಬೇರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.'

—ಫ್ರಾನ್ಸಿಸ್ ಬೇಕನ್
(Francis Bacon)

ಮನುಷ್ಯ ಕಾರಣ ಕೊಡಬಲ್ಲ ಪ್ರಾಣಿ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಮೊದಲಬಾರಿಗೆ ಸಾರಿದವನು ಅರಿಸ್ಟಾಟಲ್ (Aristotle). ಮನುಷ್ಯನು ತನ್ನ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಯ ಕಾರಣದಿಂದ ಕಾರಣ ಕೊಡಬಲ್ಲ ಪ್ರಾಣಿ ಎಂದೂ, ಗಣಿತವನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಯ ಇರುವಿಕೆ ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾಗಿ ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಅರಿಸ್ಟಾಟಲ್ ತನ್ನ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಕಾರಣಗಳಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ.

'ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ತಿಳಿಯದವನು ಇಲ್ಲಿಗೆ ಪ್ರವೇಶಿಸದಿರಲಿ' ಎಂಬುದಾಗಿ ತನ್ನ ಶಾಲೆಯ ದ್ವಾರದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ, ಅವನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಾರೆಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಹೊಂದಿರಲಿಲ್ಲ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲ, ತನ್ನ ಶಿಷ್ಯರ ಗಮನಕ್ಕೆ ಅವನು ತರುತ್ತಿದ್ದ ವಿಷಯಗಳೇನೆಂದರೆ,

ಮನಸ್ಸು ಬಹು ಆಳವಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಲ್ಲ ಸಾಮಾಜಿಕ, ರಾಜಕೀಯ, ನೈತಿಕ ಸಂಬಂಧದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು. ಪ್ಲೇಟೋ (Plato) ಮತ್ತು ಅವನ ಶಿಷ್ಯ ಸಮೂಹ ಮನುಷ್ಯನ ಅಸ್ತಿತ್ವ, ಅವನ ಕರ್ತವ್ಯ ಮತ್ತು ಅವನ ಪರ್ಯವಸಾನ ಇವುಗಳನ್ನೂ, ಮನುಷ್ಯನಿಗೂ ದೈವಕ್ಕೂ, ಮನುಷ್ಯನಿಗೂ ಅಗೋಚರ ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ವಿಷಯಗಳಿಗೂ ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೂ ಯಾವ ಸಂಬಂಧ? ವಿಷಯ ಇಷ್ಟೇ : ಶಿಸ್ತಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಲೋಚಿಸಬಲ್ಲ ಮತ್ತು ಆಧಾರ ವಚನಗಳಿಂದ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಬಲ್ಲ ತರಬೇತಿ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಮನಸ್ಸು ಈ ಪ್ರೌಢ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವೇಶಿಸಲು ಅರ್ಹವಲ್ಲ; ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ತಕ್ಕ ತರ್ಕದ ಶಿಸ್ತು ಬೇಕಾದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತದಿಂದ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ—ಪ್ಲೇಟೋವಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ವಿಧಿವತ್ತಾಗಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವೆಂದರೆ ರೇಖಾಗಣಿತವೊಂದೇ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಮಾರ್ಗವು (the axiomatic or postulational method) ಗಣಿತವಲ್ಲದ ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಬಹು ಅಮೂಲ್ಯವಾದುದು. ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ, ಕಾನೂನು, ವಿದ್ಯಾಕ್ಷೇತ್ರ ಮತ್ತು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ನೀತಿ ಮುಂತಾದ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಮತ್ತು ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಅದು ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸತ್ಯಾಂಶದ ಅಭಿಪ್ರಾಯವು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೋ ಈ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅಷ್ಟೇ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವಾಗಿದೆ—ಮತ್ತು ಅಷ್ಟೇ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ನಿರಾಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂಬ ವ್ಯಸನಕಾರಕ ಸಂಗತಿಯೂ ಇದೆ.

ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಡದ ತರ್ಕದ ಪದ್ಧತಿಯ ಒಂದು ಖ್ಯಾತ ಐತಿಹಾಸಿಕ ನಿದರ್ಶನವನ್ನು ದರ್ಶನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕಾಣ ಬಹುದು. ಸ್ಪಿನೋಸಾ (Spinoza) ಎಂಬ ೧೭ನೆಯ ಶತ ಮಾನದ ದರ್ಶನಜ್ಞನೊಬ್ಬನು ತನ್ನ 'ಎತಿಕ್ಸ್' (Ethics) ಅನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ವಿವರಣೆಗಳು, ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ ಗಳು, ಆಧಾರಗಳು, ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮತ್ತು ಉಪಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ್ದನು. ದುರ ದೃಷ್ಟವೇನೆಂದರೆ, ಸ್ಪಿನೋಸಾ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸರ್ವಸತ್ಯದ ಆಕರ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಿಹಾಕಿಕೊಂಡು ತನ್ನ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳು ಶತ ಸಿದ್ಧ ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದನು. ಪ್ರತಿ ಸಾಧ ನೆಯೂ ಆದನಂತರ ಅವನು Q.E.D.* ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಬರೆದನು. ಇತರ ದಾರ್ಶನಿಕರು ಅವನನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿ ಅವನ ಪೂರ್ವ ಭಾವನೆಗಳಿಗೂ, ತರ್ಕಿಸುವ ಮಾರ್ಗಗಳಿಗೂ ಆಕ್ಷೇಪಣೆ ಎತ್ತಿ ದ್ದಾರೆ. ಏನೇ ಇರಲಿ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೀತಿಶಾಸ್ತ್ರ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿ ಬರೆಯುವ ಮಹದಾಸೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದ ಕೀರ್ತಿ ಸ್ಪಿನೋಸಾವಿಗೆ ದೊರಕಿದೆ.

ಅಮೆರಿಕದ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂವಿಧಾನ ಅಥವಾ ರಾಜ್ಯ ವ್ಯವಸ್ಥೆ (Constitution) ಯನ್ನು ರಚಿಸಿದವರು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಮಾರ್ಗವನ್ನನುಸರಿಸಿದ್ದರು. ಖ್ಯಾತ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಪ್ರಕಟನೆಯಲ್ಲಿ, 'ಈ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳು ಸ್ವತಸಿದ್ಧ ವೆಂತಲೂ, ಎಲ್ಲ ಮನುಷ್ಯರೂ ಸಮಾನರಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದಾ

* Quod erat demonstrandum— ಅಂದರೆ 'ಸಾಧಿತ ವಾಗಬೇಕಿದ್ದುದು' ಎಂದರ್ಥ.

ರೆಂತಲೂ, ಬದುಕು, ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಸುಖಾನ್ವೇಷಣೆ ಮುಂತಾದ ಹಲವು ಶಾಶ್ವತ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಅವರಿಗೆ ಸೃಷ್ಟಿಕರ್ತ ಕರುಣಿಸಿದ್ದಾನೆಂತಲೂ ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದ್ದೇವೆ' ಎಂಬ ನೆನಪಿಡತಕ್ಕ ಮಾತುಗಳು ಕಂಡು ಬಂದಿವೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಮಾರ್ಗದ ಅನುಕೂಲದ ಒಂದು ಒಳ್ಳೆಯ ನಿದರ್ಶನ ಬೇಕಾದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಾಗೋಷ್ಠಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಯಾವ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಲಿ—ಎರಡು ಪಂಗಡಗಳಿರಲಿ ಅಥವಾ ಇಬ್ಬರೇ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿರಲಿ—ಶಾಸ್ತ್ರೀಯವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಾದಿಸಿ ಎದುರು ಪಕ್ಷದ ಅಭಿಪ್ರಾಯಕ್ಕೆ ವಿರೋಧ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ತರಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತಾರೆ. ವಾದವು ಹಲವು ಪೂರ್ವನಿರ್ಧಾರಿತ ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುವುದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಎರಡು ಪಕ್ಷವೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಪ್ಪುವ ಹಲವು ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಮೊದಲೇ ಪಟ್ಟಿಮಾಡುವುದು ಸಂಪ್ರದಾಯ; ಈ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಶ್ರೋತೃಗಳ ಮುಂದೆ ಮೊದಲಿಡುವುದು ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯ. ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳೇನಿವೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ ಎರಡು ಪಕ್ಷದವರೂ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಈ ಷರತ್ತು ಪೂರೈಸದಿದ್ದರೆ ಗಡಿಬಿಡಿಯುಂಟಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ 'ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ', 'ನ್ಯಾಯ', 'ಸಮತಾ ವಾದ', 'ಸಮಾಜ ಸ್ವಾಮ್ಯ ವಾದ' ಮುಂತಾದ ರೀತಿಯ ಪದಗಳ ವಿವರಣೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಇರುವ ವ್ಯಾಜ್ಯವೇ ಚರ್ಚೆಯ ಕ್ಲಿಷ್ಟಾಂಶವಾಗಿಬಿಡಬಹುದು. ತನಗೆ ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಣಯವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ತರ್ಕದ ರೀತಿಯ ಮತ್ತು ಪರಿಪೂರ್ಣ ವಾದವನ್ನು ಮುಂದಿಟ್ಟು ಎದುರು ಪಕ್ಷದವರ ಮಾತಿನ ತಪ್ಪನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿಕೊಡುವ

ಯತ್ನವನ್ನು ಯಾವ ಪಕ್ಷ ಮಾಡುವುದೋ ಅದು ಜಯಗಳಿಸುವ ಅರ್ಹತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.

ವಿಧಿವತ್ತಾದ ಚರ್ಚೆಗಳು ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿಗೆ ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಬೀಳದಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಪತ್ರಿಕೆಗಳ ಸಂಪಾದಕ ಲೇಖನಗಳಲ್ಲಿ, ಇತರ ಲೇಖನಗಳಲ್ಲಿ, ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ರೇಡಿಯೋ ಭಾಷಣಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ವಾದವಿವಾದಗಳು ಮತ್ತು ದೃಷ್ಟಿಕೋಣಗಳು ನಮ್ಮ ಮುಂದೆ ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಬಂದು ನಿಲ್ಲುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಒಂದು ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಅಥವಾ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ತನ್ನನ್ನು ಅಥವಾ ಇತರರನ್ನು ಸಮಾಧಾನಪಡಿಸುವ ವಾದವನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕೇವಲ ಭಾವನಾ ರೂಪವಾದ ತರ್ಕದಲ್ಲಿ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಪರಿಶ್ರಮವಿರುವವನು ಸೂಕ್ತವಾದ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ತವಲ್ಲದ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸಮಂಜಸವಾದ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಹಾಕಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಇತರರಿಗಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಅನುಕೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತಾನೆ. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ತನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳಿಗೆ ವಿರೋಧವಾದ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು ತರ್ಕಬದ್ಧ ವಾದದಿಂದ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದಾದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸೌಹಾರ್ದ ಮತ್ತು ಸಹನೆಯನ್ನು ತಾಳುವಂತಹವನಾಗಬೇಕು.

ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕೂ ಸಾಮಾಜಿಕ, ನೈತಿಕ, ರಾಜಕೀಯ ಅಥವಾ ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಒಂದು ವೈಚಿತ್ರ್ಯ ಹೀಗಿದೆ: ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ನಿರ್ಣಯಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನದರಲ್ಲಿರುವ ಒಮ್ಮತವು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಅದೃಶ್ಯವಾಗಿ ಅನೇಕ ರೀತಿಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

ಭಾವನೆಗಳಿಗೆ ಅವಕಾಶವಾಗುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಿಲ್ಲದೆ ಇಲ್ಲ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ವಿರೋಧಿಸುವ ಆಧಾರ ತತ್ತ್ವ ಗಳನ್ನು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದೇ ಈ ರೀತಿಯ ಜಗಳದ ಮೂಲ. ಸ್ಪಷ್ಟ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಾಗಲೂ ಬೇರೆಬೇರೆಯವರಿಂದ ಪಡೆಯಲಾದ ನಿರ್ಣಯ ಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಇದನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದೇನೂ ಕಷ್ಟವಲ್ಲ. ಕಾರಣ ಇಷ್ಟೇ: ಮನುಷ್ಯನ ಸ್ವಭಾವ ಹೇಗಿದೆ ಎಂದರೆ ಅವನಿಗೆ ಬೇಕಾದವು ಮತ್ತು ಬೇಡದವು, ಅವನ ಉದ್ವೇಗ ಗಳು ಮತ್ತು ಮನೋವಿಕಾರಗಳು ಇವುಗಳನ್ನವಲಂಬಿಸಿ ಅರಿತೋ ಅಥವಾ ಅರಿಯದೆಯೋ ಅವನು ತನ್ನ ವಾದದ ಸರಣಿ ಯನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮತ್ತು ತಾಂತ್ರಿಕ ಪ್ರಗತಿಗೆ ಹಿಂದೆ ಸಾಮಾಜಿಕ ಪ್ರಗತಿ ಬಿದ್ದಿರುವು ದಕ್ಕೆ ಇದು ಕೊಂಚವಾದರೂ ಬೆಳಕು ಚೆಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಸಿ. ಜೆ. ಕೇಸರ್ (C. J. Keyser) ಎಂಬುವನ 'ತಿಂಕಿಂಗ್ ಅಬೌಟ್ ತಿಂಕಿಂಗ್' (Thinking about Thinking) ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಿಂದ ಆಯ್ದ ಈ ಮಾತುಗಳು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಬಹು ಸೂಕ್ತವಾಗಿವೆ:

"ಒಂದು ಭಾರಿ ಗ್ರಂಥಾಲಯಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅಲ್ಲಿ ನೀವು ಅನೇಕ ರೀತಿಯ ಕಂತೆಗಳನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ—ಅನೇಕ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಕಂತೆ, ಭೌತಿಕ ಕಂತೆ, ವಿವಿಧ ಮನಶ್ಶಾಸ್ತ್ರದ ಕಂತೆ ಗಳು, ಸಮತಾ ವಾದದ ಕಂತೆಗಳು, ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವವಾದಿಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಕಂತೆಗಳು, ಆರ್ಥಿಕ ಕಂತೆಗಳು, ರಾಸಾಯನಿಕ ಕಂತೆ ಗಳು, ನೈತಿಕ ಕಂತೆಗಳು—ಮತ್ತು ಇನ್ನೆಷ್ಟೋ. ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಈಗ ನಾನು ನಿಮ್ಮನ್ನು

ಒಂದೆರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳಬಯಸುತ್ತೇನೆ. ಆ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವಾಗಿವೆಯೇ ? ನಾನು ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದೆಂದು ನಂಬಿರುವ ಪ್ರಜ್ಞೆಯ ಅರ್ಧ ಭಾಗ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಸಹ ನೀವು 'ಇಲ್ಲ' ಎನ್ನುವಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತಾದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆಯೇ ? ನೀವು 'ಅಲ್ಪ ಸ್ವಲ್ಪ ವಾದವಿತ್ತೇ ಹೊರತು, ಸರಿಯಾದ ನಿಗಮನದ ತರ್ಕವೇನೂ ಕಾಣಲಿಲ್ಲ' ಎನ್ನುವಿರಿ. ಗ್ರಂಥಕರ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಕಾರ ಅಥವಾ ಪಕ್ಷವಾದಿಯು ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಧನ ಅಥವಾ ತರ್ಕವಿಲ್ಲದೆ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ನೋಡಬಲ್ಲ ಯೋಗಿಯಾಗಿದ್ದನೇ ? 'ಅಂತಹ ಶಕ್ತಿಯೇನೂ ಕಾಣಬರಲಿಲ್ಲ.' ಅವನು ಯಾವುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸದೆ ಅಂಗೀಕರಿಸಿದನೋ ಅದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದ್ದನೋ ? 'ಇಲ್ಲ'. ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದೇನೆಂಬ ಅರಿವು ಅವನಿಗಿತ್ತೇ ? 'ಒಂದೊಂದು ಕಡೆ ಆ ರೀತಿಯ ಅರಿವು ಕೊಂಚ ಕಾಣಬರುತ್ತಿತ್ತು, ಆದರೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಇರಲಿಲ್ಲ.' ಅವನು ತನ್ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಅರಿತು ಅವುಗಳಿಂದ ನಿರ್ಣಯಗಳನ್ನು ಪಡೆದರೆ, ತನ್ನ ನಿರ್ಣಯಗಳು ಸರಿ ಎಂದು ವಾದಿಸುವ ಹಕ್ಕು ಅವನಿಗೆ ಲಭಿಸುತ್ತಿತ್ತೇ ? 'ಹಾಗೆ ಲಭಿಸುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ; ಇಷ್ಟು ಮಾತ್ರ ಅವನು ಹೇಳಲು ಅವಕಾಶವಿರುತ್ತಿತ್ತು : 'ನನ್ನ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ನಿಜವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ನನ್ನ ನಿರ್ಣಯಗಳೂ ನಿಜ'."

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಸಮಂಜಸತೆಯ ಷರತ್ತಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯವಿದೆ. ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಒಂದು ರಾಶಿ ಸಮಂಜಸತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ

ಎಂದರೆ ಅರ್ಥ ಹೀಗಿದೆ : ವಿವರಿಸದಿರುವ ಪದಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡಲು ಹೊರಟಾಗ ತರ್ಕದ ರೀತ್ಯಾ ಯಾವ ವಿರೋಧೋಕ್ತಿ (Contradiction)ಯೂ ಬರಬಾರದು (ವಿರೋಧೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುವುದು '*q* ನಿಜ ಮತ್ತು *q* ಸುಳ್ಳು' ಎಂಬ ರೀತಿಯದು).

ಎಲ್ಲ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನೂ ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸಬಲ್ಲ ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆಗೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ 'ಮಾದರಿ' ಎಂದು ಹೆಸರು. ವಿವರಿಸಲ್ಪಡದಿರುವ ಪದಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವಿಕ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ತತ್ತ್ವಸ್ವರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಲಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ್ದೇ ಆದರೆ, ಆಗ ಆ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮಾದರಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದಿಕೊಂಡಿವೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯಗಳ ತರ್ಕಬದ್ಧ ಕ್ರಮವು ಕೇವಲ ಭಾವನಾ ರೂಪದಿಂದ ವಾಸ್ತವಿಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿತವಾಗಿದೆ ಎನ್ನಬಹುದು.

ತರ್ಕದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅಗತ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಒಂದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞಾ ಕ್ರಮವು 'ಸ್ವತಂತ್ರ'ದ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯ.

q ಎಂಬ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯು *p* ಎಂಬುದಾಗಿ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವ ಹಲವು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರ ವಾಗಿದೆ ಎಂದರೆ ಅರ್ಥ ಇದು : *q* ವನ್ನಾಗಲಿ, *q* ವಿನ ವಿರೋಧ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನಾಗಲೀ *p* ಯಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹಲವು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ರಾಶಿಯೊಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಾಗಿದೆ ಎಂದರೆ ಅದರ ಪ್ರತಿ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯೂ ಇತರೆಲ್ಲದ ರಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ಸ್ವತಂತ್ರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ರಾಶಿಯ ಅನುಕೂಲವೇನೆಂದರೆ ಅನಾವಶ್ಯಕ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ತಪ್ಪಿಸುವುದು. ಒಂದು ಆಧಾರ

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯನ್ನು ಇತರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಕರೆಯುವುದೊಳ್ಳೆಯದು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸುವ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಸ್ವತಂತ್ರದ ಷರತ್ತು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಸ್ವತಂತ್ರದ ಷರತ್ತು ಯೋಚನೆಯ ಮಿತವ್ಯಯಕ್ಕೆ ದಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಅಸಮಂಜತೆಯ ಅಪಾಯವನ್ನು ಅದು ದೂರ ಇಡುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದಷ್ಟೂ ಅಸಮಂಜತೆ ತಲೆದೋರುವ ಸಂಭವ ಹೆಚ್ಚು.

ಸಮಂಜಸತೆ ಮತ್ತು ಸ್ವತಂತ್ರ ಸ್ಥಿತಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಗಣಿತವಲ್ಲದ ಇತರ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರಯೋಜನಕಾರಿಯಾಗಿದೆ.

ನ್ಯಾಯಾಲಯದ ಮುಂದೆ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಮೊಕದ್ದಮೆಯಲ್ಲಿ ವಿರೋಧೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವ ಸಾಕ್ಷಿದಾರನನ್ನು ನಂಬಲರ್ಹನೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು. ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸುವವನು ತನ್ನ ವಿರೋಧ ಪಕ್ಷದವನ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರಗಳು ಅಸಮಂಜಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟರೆ ಸಾಕು-ವಿರೋಧ ಪಕ್ಷದವನಿಗೆ ಭಾರಿ ಪೆಟ್ಟು. ವಾಣಿಜ್ಯ ಅಥವಾ ಸರಕಾರಿ ಇಲಾಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಅಧಿಕಾರಿಯ ತತ್ತ್ವಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಮಂಜತೆ (ಅದರಲ್ಲೂ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಇತರರೊಡನೆ ವ್ಯವಹಾರ ನಡೆಸುವಾಗ ಆಗುವ ಅನ್ಯಾಯದ ವಿಚಾರವಾಗಿ) ಕಂಡುಬಂದರೆ, ಕೂಡಲೇ ತನ್ನ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳೊಡನೆ ಅಥವಾ ಸಾರ್ವಜನಿಕರೊಡನೆ ಅವನಿಗೆ ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ದೇಶದ ಸುಪ್ರೀಂ ಕೋರ್ಟಿನ

ಒಂದು ಬಹು ಮುಖ್ಯ ಕರ್ತವ್ಯವೇನೆಂದರೆ: ಪಾರ್ಲಿಮೆಂಟು ಅಂಗೀಕರಿಸುವ ಕಾನೂನುಗಳು ದೇಶದ ಸಂವಿಧಾನ (Constitution)ಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದು. ಕಾನೂನುಗಳು ಸಂವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳೊಡನೆ ಸಮಂಜಸತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆಯೇ ಎನ್ನುವುದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಂವಿಧಾನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂಲತತ್ತ್ವದಿಂದ ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಬರುವ ಅನುಮಿತ (Consequence) ದೊಡನೆ ವಿರೋಧಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ ಕಾನೂನು ಅಧಿಕಾರಕ್ಕೆ ಮೀರಿದುದು (ultra vires) ಎಂಬುದಾಗಿ ಸುಪ್ರೀಂ ಕೋರ್ಟು ತೀರ್ಪು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಸ್ವತಂತ್ರ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಕಾನೂನು ರಚನೆಯಿಂದ ಉದಹರಿಸಬಹುದು. ಅನಾವಶ್ಯಕ ಕಾನೂನುಗಳಿಂದ ಕಾಯಿದೆ ಕಡತಗಳನ್ನು ತುಂಬುವುದು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಅನಪೇಕ್ಷಣೀಯ. ಅನೇಕ ವೇಳೆ ರಾಜಕೀಯ ಪಕ್ಷಗಳು ಮತದಾರರ ಪೈಕಿ ಹಲವರನ್ನು ಸಂತೈಸುವ ಸಲುವಾಗಿ ಆತುರ ಆತುರವಾಗಿ ಅನೇಕ ಕಾನೂನುಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿಬಿಡುತ್ತಾರೆ; ಈ ಕಾನೂನುಗಳ ಪೈಕಿ ಹಲವು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿ ಮುಂದೆ ಸುಪ್ರೀಂ ಕೋರ್ಟು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತದಲ್ಲೂ ಕೂಡ ದತ್ತ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಮಂಜಸತೆ ಅಥವಾ ಸ್ವತಂತ್ರ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಬಲು ಕಷ್ಟ ಮತ್ತು ಹಲವು ವೇಳೆ ಅಸಾಧ್ಯವೂ ಆಗಿದೆ. ಅಂತಹ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಗಣಿತದ ಹೊರಗಿದ್ದರೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವೇನಿಲ್ಲ, ಮೂಲಭೂತ ತತ್ತ್ವಗಳೊಡನೆ ಸಮಂಜಸತೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೇಲೆ ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಕಾನೂನು ಪಂಡಿತರು

ಮತ್ತು ಸುಪ್ರೀಂ ಕೋರ್ಟಿನ ನ್ಯಾಯಾಧೀಶರು ಇವರುಗಳೇ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತಾರೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ 'ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ (Elements)' ಎಂಬುದು ಸಮಂಜಸ ಮತ್ತು ತರ್ಕಬದ್ಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೇ ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಆದ ಆಲೋಚನೆಯ ಒಂದು ಶಿಸ್ತು ಎಂಬುದಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸಿನ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಸರ್ ಥಾಮಸ್ ಹೀತ್ (Sir Thomas Heath) ಸರಳ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಇದುವರೆಗೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಯಃ ಇನ್ನೂ ಮುಂದೆಯೂ ಆಗಬಹುದಾದ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಪೈಕಿ ಅತ್ಯಂತ ಶ್ರೇಷ್ಠವಾದುದು' ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲ, ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಎಂಬ ನಾಮಕರಣವನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಟ್ಟರೆ, ಅದು ಪ್ರಪಂಚದ ಮಹತ್ತರ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದು ಎನಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಗಣಿತ, ವಿಜ್ಞಾನ, ಶಿಕ್ಷಣ ಮತ್ತು ದರ್ಶನಶಾಸ್ತ್ರ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಪ್ರಭಾವ ಹೇರಳವಾಗಿದೆ.

ಗಣಿತದ ಉಪಯೋಗಗಳ ಪೈಕಿ ಕಲೆ (arts) ಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಅದರ ಸೇವೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸಬಹುದು. ಕಲೆಗಳು ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಅನೇಕರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ, ಆದರೆ ಇದು ಸರಿಯಲ್ಲ. ಚಿತ್ರಕಲೆ, ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪ ಮತ್ತು ಸಾಹಿತ್ಯ ಇವುಗಳ ಅನೇಕ ರೀತಿಯ ಶೈಲಿಗೆ ಗಣಿತವೇ ಕಾರಣ ಮತ್ತು ಸಂಗೀತಕ್ಕೆ ಗಣಿತದಿಂದಾಗಿರುವ ಸೇವೆಯ ಕಾರಣದಿಂದಲೇ ಮನುಷ್ಯನು ಸಂಗೀತವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿ ಪ್ರಪಂಚದ ಮೂಲೆಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಗೀತದ ಆನಂದಾನುಭವ ಹರಡಿದೆ.

ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ, ವೈಜ್ಞಾನಿಕ, ದಾರ್ಶನಿಕ ಮತ್ತು ಕಲೆಗಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಕಾರಣದಿಂದ ಮನುಷ್ಯನು ಗಣಿತದ ಸಂಶೋಧನೆ

ಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿದ್ದಾನೆ. ಇವುಗಳಷ್ಟೇ ಆಕರ್ಷಣೀಯವಾದ ಗುರಿ ಇನ್ನೊಂದಿದೆ—ಅದೇನೆಂದರೆ ಗಣಿತದಲ್ಲಿರುವ ರಮಣೀಯತೆ. ಗಣಿತವೂ ಒಂದು ಕಲೆಯಾಗಿ ಇತರ ಕಲೆಗಳು ಹೇಗೋ ಹಾಗೆ ಅದೂ ಆನಂದದಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಮಾಮೂಲಿ ಕಲೆಗಳ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಸಾಂಪ್ರದಾಯಿಕ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಅನಾನುಕೂಲವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೂ ಕಲೆಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುವ ಅನೇಕರು ಈ ಮಾತನ್ನು ಕೇಳಿ ಚಕಿತರಾಗಬಹುದು. ಆದರೆ ಸಾಧಾರಣ ಮಾನವ ಕಲೆಗಳು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಏನು ಎಂಬ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಯೋಚಿಸಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ : ಚಿತ್ರಕಲೆಯಲ್ಲಿ ಅನೇಕರು ಕಾಣುವುದೇನೆಂದರೆ ಹಲವು ಪರಿಚಿತ ದೃಶ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಹೊಳಪಾದ ಬಣ್ಣಗಳು. ಆದರೆ ಚಿತ್ರದ ರಚನೆಯನ್ನು ಕಲೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಇದಾವ ಲಕ್ಷಣಗಳೂ ಅಲ್ಲ. ಗೂಢಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಕಲಿಯಬೇಕು ಮತ್ತು ಕಲೆಯನ್ನು ನಿಜವಾಗಿ ಮೆಚ್ಚಬೇಕಾದರೆ ಬಹಳ ಅಧ್ಯಯನ ಆವಶ್ಯಕ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಹಾಗೆಯೇ. ಇದರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬರುವ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳು, ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆ ಕ್ರಮ ಇವೆಲ್ಲ ಅತ್ಯಂತ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾದ ಮತ್ತು ಸ್ಫುಟವಾದ ವಿಷಯಗಳಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳನ್ನು ಮೆಚ್ಚಲು ಸಿದ್ಧರಾಗಿರುವವರಿಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವೂ, ತೃಪ್ತಿದಾಯಕವೂ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಗಣಿತದ ಈ ಅಂಶವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತ ಬರ್ಟ್‌ರ್ಯಾಂಡ್ ರಸಲ್ ಹೀಗೆ ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ: 'ಸರಿಯಾದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ನಿಜವೂ, ಮಹತ್ತರವೂ ಆದ ರಮಣೀಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ—ಈ ರಮಣೀಯತೆಯು ಶಿಲ್ಪಕೃತಿಯಂತೆ ಉಗ್ರ ಮತ್ತು ಕಠಿನ ನಿಯಮಬದ್ಧ, ಮನುಷ್ಯನ

ನಿಸ್ಸತ್ತ್ವ ಪ್ರಕೃತಿಗೆ ಒಲಿಯುವುದಿಲ್ಲ; ಚಿತ್ರಕಲೆ ಅಥವಾ ಸಂಗೀತದ ಜಾಜ್ವಲ್ಯಮಾನವಾದ ಬೆರಗನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ, ಆದರೂ ಘನ ಗಂಭೀರತೆಯ ಶುದ್ಧತೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡು ಉತ್ತಮೋತ್ತಮ ಕಲೆಯಷ್ಟೇ ಪರಿಪೂರ್ಣತೆಯನ್ನು ಹೊಂದುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವುಳ್ಳದ್ದು. ಆನಂದದ ನಿಜವಾದ ದೃಷ್ಟಿ, ಪರವಶತೆ, ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಶ್ರೇಷ್ಠತೆಯ ಹೆಗ್ಗುರುತಾದ ಮನುಷ್ಯಾತೀತ ಭಾವನೆ ಇವು ಕವಿಯ ಕಲೆಯಂತೆ ಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುವು.' ಗಣಿತದ ಹಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳು, ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಹಲವು ಭಾಗಗಳು, ಪ್ರಲಂಬ ರೇಖಾಕೃತಿಯ ಗಣಿತ (Projective Geometry) ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸೂತ್ರಗಳು ಇವೆಲ್ಲ ರಮಣೀಯತೆಯ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ ಗುರಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿ ರಚಿತವಾದುವು.

ಗಣಿತವು ಒಂದು ಭಾಷೆ ಎಂಬ ವಿಷಯ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಅರ್ಥವಾಗಿಲ್ಲ. ನಮ್ಮ ಮಾತೃಭಾಷೆ, ಬರವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಪದಗಳು ಗುಣಗಳ ವರ್ಣನೆಗೆ ಸಹಾಯಕ. ನಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಆಡುವ ಮತ್ತು ಬರೆಯುವ ಭಾಷೆಯು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇತರ ಪ್ರಮುಖ ಭಾಷೆಗಳೂ ಇವೆ. ಹಲವು ರೀತಿಯ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಯೋಚನೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಸಂಗೀತವು ಒಂದು ಭಾಷೆ. ಚಿತ್ರ, ಮೂರ್ತಿಶಿಲ್ಪ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪ ಇವೂ ಕೂಡ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನೂ, ನಂಬಿಕೆಗಳನ್ನೂ ತಿಳಿಸುವ ಮಾರ್ಗಗಳು. ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ಪರಿಮಾಣ (quantity) ದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ನಮಗಿರುವ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲು

ನಮಗೆ ಗಣಿತ ಬೇಕು. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ, ಅದರ ಇತರ ಉಪಯೋಗಗಳು ನಮಗೆ ವೇದ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಅದು ಮೊತ್ತದ ಭಾಷೆ ಎಂಬುದು ನಿಜ; ಗಣಿತವು ಗಾತ್ರ ಮತ್ತು ಕ್ರಮದ ಭಾಷೆಯೂ ಹೌದು, ತರ್ಕದ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಭಾಷೆಯೂ ಹೌದು.

ಇರುವ ಭಾಷೆಗಳ ಪೈಕಿ ಗಣಿತವು ಅತ್ಯಂತ ಪರಿಪೂರ್ಣ ವಾದುದು. ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಪ್ರಕೃತಿಯು ಅದರ ಮೂಲಕ ನುಡಿಯುತ್ತದೆ, ಸೃಷ್ಟಿಕರ್ತನು ಅದರ ಮೂಲಕ ನುಡಿದಿದ್ದಾನೆ ಮತ್ತು ವಿಶ್ವದ ರಕ್ಷಕನು ಅದರ ಮೂಲಕ ನುಡಿಯು ತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಗಣಿತವನ್ನು ಭಾಷೆಗಳ ಭಾಷೆ ಎನ್ನಬಹುದು. ಯಾವ ಮಾತೃಭಾಷೆಗಿಂತಲೂ ಅದು ಮಿಗಿಲಾದುದು. ಅದು ಅಂತರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಭಾಷೆ. ಗಣಿತದ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ದೇಶಗಳ ಸರಹದ್ದುಗಳು ಅಂತಹ ಅಡ್ಡಿಆತಂಕಗಳ ನ್ನೇನೂ ತಂದೊಡ್ಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಎಚ್. ಜಿ. ವೆಲ್ಸ್ (H.G. Wells) ಹೀಗೆ ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ: 'ನವೀನ ಗಣಿತವು ಭಾಷೆಗೆ ಒಂದು ಸಹಾಯಕಾರಿ. ರೀತಿ ಮತ್ತು ರಾಶಿಗಳ ವಿಷಯವಾಗಿ ತಿಳಿಸಲು, ಸಾಧಾರಣ ಭಾಷೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ, ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲು ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸುತ್ತದೆ. ಭೌತಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಜ್ಞಾನ, ಅರ್ಥ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನೇಕ ಅಂಕಿಅಂಶಗಳು ಮತ್ತು ತುದಿಮೊದಲಿಲ್ಲದ ಸಾಮಾಜಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಗಣಿತದ ಆಳ ವಾದ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಶಿಸ್ತನ್ನು ಪಡೆದಿರುವವರಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಗ್ರಹಿ ಸಲು ಮತ್ತು ವಿವೇಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಮುಂದೆ ಬರುವ ಪ್ರಪಂಚದ ತೊಡಕಾದ ರಾಷ್ಟ್ರಗಳಲ್ಲಿ ದಕ್ಷ ನಾಗರಿಕನೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳ

ಬೇಕಾದರೆ ಈಗ ಓದುಬರಹಕ್ಕೆ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಇದೆಯೋ ಅದೇ ಬೆಲೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಹಾಕುವುದು, ಸರಾಸರಿ, ಅಧಿಕತಮ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಇವುಗಳ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸುವುದು ಮುಂತಾದುವಕ್ಕೆ ಇರುವ ಕಾಲವು ಅಷ್ಟೇನೂ ದೂರವಾಗಿಲ್ಲ.

ಗಣಿತದಲ್ಲಿರುವ ತರ್ಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಕ್ರಮವು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಗದರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನದ ಒಂದು ಶಾಖೆಯು ಗಣಿತವಾಗಿದೆಯೆಂದರೆ ಆ ಶಾಖೆಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಒಂದು ಗಣಿತದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದರ್ಥ—ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಅನುಭವಕ್ಕೆ ಬರುವ ಅಂಶಗಳೊಡನೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿಗಮನದ ರೀತ್ಯಾ ಪಡೆಯಲು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಒಂದು ರಾಶಿ (ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ) ಸಿಕ್ಕಿದೆ ಎಂಬುದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ಈ ನಿಗಮನದ ರೀತ್ಯಾ ತಿಳಿಯಬರುವ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ಭಾವಿಕಥನ (ಅಥವಾ ಭವಿಷ್ಯವಾದ ಅಥವಾ ಪೂರ್ವಸೂಚನೆ—predictions) ಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಖೆಯು ಗಣಿತವೆನಿಸಿಕೊಂಡಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ನಿಗಮನದ ರೀತ್ಯಾ ಹೊಸ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳನ್ನು ಮುಂಚೆಯೇ ನುಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ಒಂದು ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಗದ ಪ್ರಗತಿ ಅಥವಾ ಪರಿಪೂರ್ಣತೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವಾಗ ಅದರ ಎಷ್ಟು ಮೂಲ ಸಂಬಂಧಗಳು ಗಣಿತ ರೀತ್ಯಾ ತಿಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಲೇಖಕರು ಕರಾರುವಾಕ್ಕಿನ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಜೀವವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರ ಇವುಗಳನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ್ದಾರೆ.

ಒಂದು ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಖೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಸಫಲತೆಯನ್ನು ಉದಹರಿಸುವ ಖ್ಯಾತ ಸಂಗತಿಯೊಂದೆಂದರೆ ನ್ಯೂಟನ್ನಿನ ಚಲನಶಾಸ್ತ್ರ (Mechanics). ನ್ಯೂಟನ್ನಿನ ಮೂರು ಚಲನ ನಿಯಮಗಳು, ಅವನ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣ ನಿಯಮ ಮತ್ತು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡಿನ ರೇಖಾಗಣಿತ ಇವುಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ನ್ಯೂಟನ್ನಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಆಗಿದೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸುಮಾರು 200 ವರ್ಷಗಳ ತನಕ ಭವಿಷ್ಯವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಕರವಾಗಿ ನುಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿತ್ತು. ಅದು ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನಗಳು ಬೆಳೆಯಲು ಅಸಾಧಾರಣ ಪ್ರಚೋದನೆಗೆ ಕಾರಣವಾಯಿತು; ಆದರೆ ಈಗ ಐನ್‌ಸ್ಟೀನಿನ ಕ್ರಮ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ತೃಪ್ತಿಕರ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಶವನ್ನು ತಿಳಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಖೆಯೊಂದರ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಸಮಂಜಸತೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಲದು; ಆ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳೊಡನೆಯೂ ಸಮಂಜಸತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು—ಅಂದರೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಆಗುವ ಭಾವಿಕಥನಗಳು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕರೀತ್ಯಾ ಸರಿನೋಡಲು (ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಹಲವು ಮಾಮೂಲಿ ತಪ್ಪುನೆಪ್ಪಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು) ಸಾಧ್ಯವಿರಬೇಕು. ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಗಳು ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಂದ ಸರಿ ಎನಿಸಿಕೊಂಡರೆ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳು ಭದ್ರವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿ ತಪ್ಪೆಂದು ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಂದ ತಿಳಿದು ಬಂದ ಕೂಡಲೇ ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಅಗತ್ಯ ಏಳುತ್ತದೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳ ಸ್ವತಂತ್ರ ಲಕ್ಷಣದ ಶರತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲೂ ಅರ್ಥವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿವೆ. ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಎಲ್ಲ

ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಉತ್ತಮೋತ್ತಮ ಗುರಿ ಏನೆಂದರೆ ಅತ್ಯಂತ ಕ
ಯಾದ ಆಧಾರ ಸೂತ್ರ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನಿಟ್ಟುಕೊ
ಅತ್ಯಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಾದ ಅನುಭವಾತ್ಮಕ ಅಂಶಗಳನ್ನು ತಕ
ನಿಗಮನದ ರೀತ್ಯಾ ಪಡೆಯುವುದು.

ಐನ್‌ಸ್ಟೀನಿನ ಒಂದು ಮಾತನ್ನು ಹೇಳಿ ನಾವು
ಮುಕ್ತಾಯ ಮಾಡೋಣ : 'ವಿಚಾರಪರ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಮನಸ್ಸ
ಎಲ್ಲ ಕಾಲಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಕೋಲಾಹಲವೆಬ್ಬಿಸಿರುವ ಒಂದು ಗ
ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಇಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅನುಭವದಿಂದ ದ
ವಾಗಿದ್ದು ಮಾನವ ರಚಿತ ಈ ಗಣಿತವು ವಾಸ್ತವಿಕತೆ
ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟು ಸೊಗಸಾಗಿ ಔಚಿತ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರ
ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ ?'